

Da utilização da Identidade em Lógica Clássica e algumas posições acerca de seu uso

Luana Talita da Cruz³³

Resumo: Pretende-se apresentar a introdução do sinal de identidade em Lógica Clássica, através da obra *Conceitografia* de Gottlob Frege, abordando também a argumentação utilizada por ele acerca do uso de tal sinal em seu célebre artigo *Sobre Sentido e Referência*. Uma vez que Frege não dá conta de justificar completamente o sinal, pretende-se ainda apresentar brevemente, como contraponto, as abordagens de Bertrand Russell e a de Ludwig Wittgenstein.

Palavras-chave: Identidade; Frege; Lógica Clássica

Abstract: The aim of this work is to present the introduction of the identity sign in the work of Gottlob Frege's *Begriffsschrift*, addressing the arguments used by the author about the use of such a signal also in his famous article *Über Sinn und Bedeutung*. Since Frege does not account completely to justify the signal, a further aim is to briefly present, as counterpart, the approaches of Bertrand Russell and Ludwig Wittgenstein.

Keywords: Identity; Frege; Classical Logic

Immanuel Kant é frequentemente lembrado na história da Lógica graças a um equívoco. No século XVIII, Kant insistia “que a lógica era uma ciência completa; acabada, em suas bases, na obra de Aristóteles”³⁴. Tal afirmação se provou errada no século seguinte, quando ocorreram diversas inovações na disciplina tais como as de George Boole e de Gottlob Frege.

Foi com a publicação da obra *Conceitografia (Begriffsschrift)* que, em 1879, Frege deu um importante passo além da lógica aristotélica e da lógica estóica³⁵, alterando definitivamente a história da Lógica ao “formalizar as regras de demonstração, iniciando com regras elementares, bem simples, sobre cuja aplicação não houvesse dúvidas”³⁶. Nasce aqui o que hoje se conhece como Lógica Clássica.

É nessa obra que é introduzido por Frege o sinal de identidade, representado aqui por três linhas horizontais. O autor enuncia que o sinal representa tanto identidade de conteúdo quanto equivalência material, o que significaria dizer que “o símbolo A e o símbolo B tem o mesmo conteúdo conceitual, de modo que A pode sempre substituir B e vice versa”³⁷. Já com

³³ Acadêmica do curso de Filosofia da Universidade Federal de Pelotas.

³⁴ HAACK, Susan. *Filosofia das Lógicas*. 2002, p. 208

³⁵ Por exemplo, como Susan Haack aponta, a formalização da implicação material (\rightarrow), antecipada na lógica estóica, se dá com Frege.

³⁶ MORTARI, Cezar. *Introdução à Lógica*. 2001, p. 27

³⁷ FREGE, Gottlob *apud* BARBOSA, Pedro R. (“the symbol A and the symbol B have the same conceptual content, so that A can always be replaced by B and vice versa”)

a introdução do sinal há um problema referente à interpretação que lhe é dada na obra, pois não é completamente claro como funciona seu uso, ainda que o autor ofereça justificativas e explicações ao introduzi-lo.³⁸

Acerca da importância do novo sinal, Frege escreve:

Identidade de conteúdo difere de condicionalidade e negação por aquela se aplicar a nomes e não a conteúdos. Enquanto, em outros contextos, sinais são meramente representações de seu conteúdo, de modo que, cada combinação entre eles expressa uma relação entre seus respectivos conteúdos, eles, de repente, mostram a si mesmos quando são combinados pelo sinal de identidade de conteúdo, pois ele expressa a circunstância em que dois nomes têm o mesmo conteúdo. Dessa forma, a introdução de um sinal para identidade de conteúdo necessariamente produz uma bifurcação no sentido de todos os sinais: eles, por vezes, representam seu conteúdo e por vezes representam eles mesmos.³⁹

Dessa forma, a abordagem dada ao sinal de identidade é metalinguística, pois afirmar que “ $a \equiv b$ ” é afirmar que “ a ” e “ b ” são nomes do mesmo objeto.⁴⁰

O que impede que “ $a \equiv b$ ” se limite completamente ao âmbito metalinguístico é a diferenciação estabelecida por Frege entre sinais, a que são conferidos conteúdos, e nomes,

³⁸ Pedro R. Barbosa afirma que “a maioria de suas explicações sobre a identidade de objetos, usando o símbolo “=”, também não são muito claras. Às vezes dá uma impressão de que “=” estabelece uma relação entre sinais e, mais tarde, ele afirma que é uma relação entre sinais com o mesmo conteúdo, que, como vimos, é ambígua” (“Most of his explanations concerning the identity of objects, using the “=” symbol, are also not very clear. Sometimes it gives one the impression that “=” establishes a relations between signs, yet later he states that it is a relations between signs with the same content, which as we have seen is ambiguous”).

³⁹ FREGE, Gottlob *apud* PERRY, John. (“Identity of content differs from conditionality and negation in that it applies to names and not to contents. Whereas in other contexts signs are merely representatives of their content, so that every combination into which they enter expresses on a relation between their respective contents, they suddenly display their

own selves when they are combined by means of the sign for identity of content; for it expresses the circumstance that two names have the same content. Hence the introduction of a sign for identity of content necessarily produces a bifurcation in the meaning of all signs: they stand at times for their content, at times for themselves.”).

⁴⁰ Gilead Bar-Elli afirma que “pode-se distinguir entre ‘a visão metalinguística simples’ – que identidade trata apenas de **sinais** linguísticos – e ‘a visão metalinguística complexa’ – que identidade trata sobre **nomes** e seus conteúdos, onde nome inclui o modo de determinação de seu conteúdo” (“I shall distinguish in what follows between “the simple meta-linguistic view” –that identity statements are only about linguistic **signs** – and “the complex metalinguistic view” – that identity statements are about **names** and their contents, where a name includes the mode of determination of its content”).

que contêm modos de determinar seu conteúdo. Sendo assim, substituir um nome por outro, sem ter com isso o valor de verdade da sentença alterado, pode ser informativo, justificando a introdução do sinal.⁴¹

A exigência de que uma sentença que utiliza o sinal de identidade seja uma sentença informativa, cria um problema para o uso do sinal. Torna-se necessário uma abordagem clara acerca de sua utilização, de modo que se possa identificar o tipo de relação que é simbolizada. Frege aborda a questão já no início de seu texto *Sobre Sentido e Referência (Über Sinn und Bedeutung)*:

A igualdade desafia a reflexão dando origem a questões que não são muito fáceis de responder. É ela uma relação? Uma relação entre objetos ou entre nomes ou sinais de objetos?⁴²

Cabe esclarecer que, como apontado por Caplan e Thau, aqui o autor parece abandonar a distinção anterior entre nomes e sinais.

Frege descarta rapidamente a possibilidade de o sinal representar uma relação entre objetos, ou seja, aquilo a que os nomes se referem, pois, se fosse esse o caso, “ $a = b$ ”⁴³ e “ $a = a$ ” não poderiam diferir, independentemente de possuírem valores cognitivos diferentes (no caso, “ $a = a$ ” ser uma sentença *a priori* enquanto “ $a = b$ ” nem sempre o é). Assim, enunciaríamos, conforme o autor, “a relação de uma coisa consigo mesma, relação que toda coisa tem consigo mesma, mas que nunca se dá entre duas coisas distintas”⁴⁴.

Dessa forma, resta a Frege, entre as possibilidades que ele próprio propõe, apenas uma solução: a identidade representa uma relação entre sinais de objetos. A sentença “ $a = b$ ” diz respeito ao fato de “ a ” e “ b ” referirem-se a mesma coisa e essa é a relação entre eles. Entretanto:

⁴¹ Sobre a interpretação do sinal de identidade na *Conceitografia* ver *What's Puzzling Gottlob Frege?* (CAPLAN, Ben; THAU, Mike; 2001) e *Identity in Frege's Begriffsschrift: Where Both Thau-Caplan and Heck Are Wrong* (BAR-ELLI, Gilead; 2006).

⁴² FREGE, Gottlob. *Sobre Sentido e Referência*. 1978, p. 61

⁴³ Há uma alteração no sinal: aqui a identidade já é representada pelo mesmo sinal de igualdade matemática.

⁴⁴ FREGE, Gottlob. *Sobre Sentido e Referência*. 1978, p. 61

Mas esta relação se manteria entre os nomes ou sinais, apenas na medida em que denominassem ou designassem alguma coisa. Ela seria mediada pela conexão de cada um dos dois sinais com a mesma coisa designada.⁴⁵

Sendo assim, as sentenças “a = a” e “a = b” só diferem no modo de apresentação do objeto que cada sinal designa, pois, de outra forma, se cairia no mesmo problema encontrado ao pensar a identidade como uma relação entre objetos. Pode-se, então, pensar que há ligado ao sinal, não apenas aquilo que ele designa, a saber, sua referência, mas também o modo como esta se apresenta, ou seja, seu sentido⁴⁶.

Ao separar o *sentido*⁴⁷ e a referência de um sinal, Frege oferece uma justificativa mais do que adequada para o sinal de identidade. Uma vez que a referência não pertence a um único sinal, sinais que apresentam uma relação de identidade trazem nessa relação uma informação além da contida nos sinais relacionados. Como o próprio autor exemplifica “o pensamento da sentença ‘ a Estrela da Manhã é um corpo iluminado pelo sol’ é diferente do da sentença ‘ a Estrela da Tarde é um corpo iluminado pelo sol’. Alguém que não soubesse que a Estrela da Tarde é a Estrela da Manhã poderia sustentar um pensamento como verdadeiro e outro como falso”⁴⁸.

Para Frege, o valor de verdade atribuído a uma sentença está diretamente ligado a sua referência, de modo que, o pensamento expresso por, ou seja, o sentido de “a = a” pode diferir do pensamento expresso por “a = b”, mas sua referência, a saber, seu valor de verdade, será o mesmo. Cabe ressaltar novamente que o valor cognitivo das duas sentenças não será o mesmo, já que “a = b” é informativo e “a = a” não é.

A distinção estabelecida por Frege entre sentido e referência tem importantes implicações tanto para filosofia da linguagem quanto para filosofia da mente, conforme indicam Caplan e Thau em *What's puzzling Gottlob Frege?*. Entretanto, segundo esses autores, Frege introduz a distinção apenas para salvar sua visão de nomes, objetivo que, eles

⁴⁵ FREGE, Gottlob. *Sobre Sentido e Referência*. 1978. p. 61

⁴⁶ Frege primeiro faz essa distinção, como apontam Caplan e Thau, na obra *Função e Conceito*.

⁴⁷ Conforme Frege afirma na página 86 de *Sobre Sentido e Referência* : “isto é, o pensamento por ela (a sentença) expresso”.

⁴⁸ FREGE, Gottlob. *Sobre Sentido e Referência*. 1978 p.67

afirmam, não é atingido nem na *Conceitografia* nem em *Sobre Sentido e Referência*.⁴⁹ Ainda assim, o sinal introduzido por Frege na *Conceitografia* e que esteve presente em suas demais obras teve sua importância reconhecida.

Sendo que nem a explicação metalinguística nem a separação entre sentido e referência pareceram explicar suficientemente a relação representada pelo sinal, Bertrand Russell oferece outra alternativa, ainda que siga um caminho semelhante ao de Frege.⁵⁰

Russell afirma em *Da Denotação* que a explicação de Frege, embora não conduza ao erro lógico real, parece ser artificial, não dando uma análise exata do problema. Para ele, “se ‘C’ é uma expressão denotativa, pode acontecer que exista uma entidade x (não pode existir mais de uma) para a qual a proposição ‘ x é idêntico a C’ seja verdadeira”⁵¹. Entretanto, “isso não acontece porque o nome tem um sentido, mas sim porque ele abrevia uma descrição definida.”⁵² Dessa forma, pode-se “dizer que a entidade x é a denotação da expressão ‘C’”⁵³.

Mas ainda, ao considerar que “ $a = b$ ”, tal sentença pode ser entendida como “ a é b ” e não é claro quando o sinal “=” trata de identidade, predicação ou existência. É essa falta de clareza que, segundo Glock, Ludwig Wittgenstein considera como fonte de confusões.

Wittgenstein rejeita muito facilmente a possibilidade de a identidade representar uma relação entre objetos ao afirmar que na proposição $(x) (Fx \rightarrow (x = a))$ o que é dito é que “*apenas a* satisfaz a função Fx e não que satisfazem a função Fx *apenas* coisas que mantenham uma certa relação com a ”⁵⁴. E, tendo anteriormente, no aforismo 4.242 da obra *Tractatus Logico-Philosophicus*, afirmado que expressões como “ $a = b$ ” nada dizem sobre o significado dos termos presentes nelas, a saber, “ a ” e “ b ”, não é surpreendente que ele considere insatisfatória a solução de Russell.

Na verdade, a partir do aforismo 5.5303, Wittgenstein passa a considerar abertamente proposições de identidade como contra-sensos, pois “dizer de *uma* coisa que ela é idêntica a si mesma é não dizer rigorosamente nada”⁵⁵.

⁴⁹ CAPLAN, Ben; THAU, Mike. *What's Puzzling Gottlob Frege?* 2001, p. 199

⁵⁰ Glock afirma no *Dicionário Wittgenstein*, p. 199, que a teoria russelliana é uma elaboração da solução dada por Frege.

⁵¹ RUSSELL, Bertrand. *Da Denotação*. 1978, p.10

⁵² Conforme diz Kent Bach em *Comparing Frege and Russell* (“This is not because the name has a sense (in Frege's sense of 'sense') but because it abbreviates a definite description”).

⁵³ RUSSELL, Bertrand. *Ibidem*, p.11

⁵⁴ WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*. p. 235

⁵⁵ WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*. p. 235

Ele afirma ainda que o sinal “=” não é essencial para a ideografia, devendo ser substituído por outro tipo de simbolização uma vez que através de pseudoproposições, como as de identidade, não se pode chegar a uma ideografia correta. Wittgenstein defende ainda, que ao ligar duas expressões através da identidade, se está dizendo que elas são mutuamente substituíveis e, para tanto, é necessário conhecer seu significado. Todavia a identidade do significado de duas expressões não é possível de ser asserida, já que para asserir algo sobre seus significados deve-se antes conhecer tais significados. Assim sendo, o autor rejeita ambas as possibilidades que Frege propõe para as relações representadas pelo sinal de identidade no começo de *Sobre Sentido e Referência*.

Ainda assim, a utilização do sinal de identidade em Lógica Clássica é hoje amplamente aceita, mesmo que traga consigo problemas bastante complicados de se solucionar. Não apenas a relação que representa, como também sua necessidade, foi questionada, sendo que as questões levantadas permanecem em aberto. Desse modo, sua importância talvez seja mais claramente percebida nas palavras de Russell:

Ninguém, fora de um texto de lógica, jamais desejou dizer “ x é x ”, e entretanto asserções de identidade são frequentemente feitas em formas tais como ‘Scott foi o autor de Waverly’ ou ‘tu és um homem’. O significado de tais proposições não pode ser formulado sem a noção de identidade apesar de não serem simplesmente enunciados de que Scott é idêntico a um outro termo, a saber, o autor de Waverly, ou que tu és idêntico a um outro termo, a saber, humano. O menor enunciado de ‘Scott é o autor de Waverly’ parece ser ‘Scott escreveu Waverly; e é sempre verdadeiro para y que se y escreveu Waverly, y é idêntico a Scott. É deste modo que a identidade entra em ‘Scott é o autor de Waverly’; e é possuindo tais usos que a identidade é importante de ser afirmada.⁵⁶

⁵⁶ RUSSELL, Bertrand. *Da Denotação*. 1978, p.14

Referências Bibliográficas

BACH, Kent. *Comparing Frege and Russell*. Encontrado em:

<http://userwww.sfsu.edu/~kbach/FregeRus.html> Último acesso: 20/05/2011

BARBOSA, Pedro Rosário. *Begriffsschrift (Conceptual Notation)*. Encontrado em:

<http://www.prosario->

[2000.0catch.com/Philosophy/Contemporary_Philosophers/Gottlob_Frege/begriffsschrift.htm](http://www.prosario-2000.0catch.com/Philosophy/Contemporary_Philosophers/Gottlob_Frege/begriffsschrift.htm)

Último acesso: 14/05/2011.

BAR-ELLI, Gilead. *Identity in Frege's Begriffsschrift: Where Both Thau-Caplan and Heck Are Wrong*. In: *Canadian Journal of Philosophy* Volume 36, Number 3, September 2006.

CAPLAN, Ben; THAU, Mike. *What's Puzzling Gottlob Frege?* In: *Canadian Journal of Philosophy* Volume 31, Number 2, June 2001.

DICKIE, Imogen. [*Informative Identities in the *Begriffsschrift* and 'On Sense and Reference*](#). In: *Canadian Journal of Philosophy* Volume 38, Number 2, June 2008.

FREGE, Gotlob. *Lógica e Filosofia da Linguagem*. Tradução de Paulo Acoforado. São Paulo: Cultrix, 1978.

_____. *Sobre Sentido e Referência*. In.: *Lógica e Filosofia da Linguagem*. São Paulo: Cultrix, 1978.

HAACK, Susan. *Filosofia das Lógicas*. São Paulo: Editora UNESP, 2002.

GLOCK, Hans - Johann. *Dicionário Wittgenstein*. São Paulo: Zahar, 1998.

MAY, Robert. *Frege on Identity Statements*. Encontrado em:

<http://kleene.ss.uci.edu/~rmay/Frege.pdf> Último acesso: 14/05/2011

MORTARI, Cezar. *Introdução à Lógica*. São Paulo: Editora UNESP, 2001.

PERRY, John. *Frege on Identity, Cognitive Value, and Subject*. Encontrado em: <http://www-csli.stanford.edu/~jperry/PHILPAPERS/frege.pdf> Último acesso: 14/05/2011

RUSSELL, Bertrand. *Lógica e Conhecimento* In *Coleção Os Pensadores - Russell*. São Paulo: Abril Cultural, 1978.

WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*. São Paulo: EDUSP, 1994.
