



# RBES

Revista Brasileira de  
Engenharia e Sustentabilidade

ISSN 2448-1661

Pelotas, RS, UFPel-Ceng

<https://periodicos.ufpel.edu.br/index.php/RBES/index>

**V.10, esp, p.52-60, dez 2022**

## UMA DISCUSSÃO SOBRE A DEFINIÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE DENSIDADES RELATIVAS EM OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA VIA SIMP

REZENDE, G. C.<sup>1</sup>; DO VALE, J. L.<sup>1</sup>; DA SILVA, J.<sup>1</sup>; PEREIRA, J. T.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Londrina, PR, Brasil.

<sup>2</sup> Universidade Federal do Paraná - Curitiba, PR, Brasil.

**Palavras-chave:** Otimização estrutural, SIMP, Método dos Elementos Finitos, Definição de densidades relativas, Método do Lagrangiano Aumentado

### Resumo

O presente trabalho discute a influência entre as abordagens elementar e nodal na distribuição das densidades relativas, fundamentada em uma abordagem material baseada em uma microestrutura do tipo sólida isotrópica com penalização, na solução de um problema de otimização estrutural topológica. O problema de otimização estudado visa minimizar a flexibilidade da estrutura com restrição sobre o volume material. O Método dos Elementos Finitos e o Método do Lagrangiano Aumentado são utilizados para a discretização do domínio e resolver o problema de otimização. Para evitar instabilidades numéricas e alguns outros problemas recorrentes nas topologias ótimas, são aplicados à função objetivo dois funcionais regularizadores. Os resultados obtidos são comparados, analisando a dependência de malha, o fenômeno de tabuleiro de xadrez e a presença de regiões com densidades intermediárias, com um problema solucionado via abordagem nodal. Observando as topologias ótimas de ambas as abordagens e considerando o problema proposto, a abordagem elementar é menos eficiente que a abordagem nodal, pois, mesmo com um número maior de variáveis de projeto as topologias apresentam uma menor definição do contorno material, além do fato da independência de malha não ter sido obtida com o planejamento de ensaios numéricos realizado.

## DISCUSSION ABOUT THE DEFINITION OF RELATIVE DENSITIES DISTRIBUTION IN TOPOLOGICAL STRUCTURAL OPTIMIZATION BY SIMP

**Keywords:** Structural optimization, SIMP, Finite Element Method, Relative densities definition, Augmented Lagrangian Method.

### Abstract

The present work discusses the influence between an elementary and nodal approach in the relative densities distribution, applying a material approach based on a Solid Isotropic Microstructure with Penalty, in the solution of a topological structural optimization problem. The optimization problem studied aims to minimize the compliance of the structure with a material volume constraint. The Finite Element Method and the Augmented Lagrangian Method are applied for domain discretization and to solve the optimization problem, respectively. To avoid instabilities and problems that occur in optimal topologies, two regularizing functionals are taken into account for the objective function. The results obtained are compared by analyzing the mesh dependence, the checkerboard phenomenon, and the presence of regions with intermediate densities. Analyzing the optimal topologies of both approaches for the proposed problem, the elementary approach is less efficient than the nodal approach, because even with a greater number of design variables the topologies present a lower definition of the material boundary, in addition to the fact of mesh independence has not been obtained with the numerical planning carried out.

## INTRODUÇÃO

A otimização estrutural visa obter a estrutura mais eficiente possível atendendo condições restritivas e minimizando uma ou mais funções objetivo. Isso pode ser realizado modificando as dimensões, a forma ou a topologia da estrutura (BENDSØE, 1989).

Entre os métodos de Otimização Estrutural Topológica Contínua (OETC), pode-se citar: métodos baseados no conceito de microestruturas (BENDSØE, 1989); *level-set* (WANG; WANG; GUO, 2003; DIJK et al., 2013; EMMENDOERFER, 2014); derivadas topológicas (AMUSTUTZ; NOVOTNY, 2010; NOVOTNY; SOKOLOWSKI, 2013) e analogia com modelos de remodelação óssea (PAYTEN; BEN-NISSAN; MERCER, 1998; SOUZA, 2009).

Os métodos baseados no conceito de microestruturas, em especial, a Microestrutura Sólida Isotrópica com Penalização (SIMP) (BENDSØE, 1989) é a mais utilizada devido à sua simplicidade de implementação e robustez quando aplicada em conjunto com métodos numéricos. Quanto à solução aproximada dos problemas de valores de contorno associados ao processo de otimização, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é a alternativa mais empregada.

Porém, a discretização do problema através do MEF pode gerar instabilidades numéricas. Como exemplos, podem-se citar a dependência de malha e o fenômeno do tabuleiro de xadrez (BENDSØE; SIGMUND, 2003; SIGMUND; PETERSSON, 1998). Outro problema recorrente é a presença de regiões com densidades intermediárias, chamadas regiões de cinza.

Para mitigar a ocorrência desses problemas, a literatura apresenta diferentes abordagens. Em particular, Allaire e Kohn (1993) inserem um termo no funcional de energia penalizando valores de densidade intermediária, assim, reduzem-se as regiões com microestrutura porosa. Haber, Jog e Bendsøe (1996) introduzem o Método do Perímetro no qual restringem o perímetro da topologia, o que leva a soluções convergentes quanto ao refinamento da malha. Petersson e Sigmund (1998) acrescentam restrições locais nos

componentes do gradiente do campo de densidade, ao problema clássico de minimização de flexibilidade com restrição no volume do material. Sigmund (1997), de modo a gerar independência de malha, propõem a utilização de um filtro que modifica a sensibilidade de um elemento considerando as sensibilidades em uma pequena vizinhança fixa. Fancello e Pereira (2003) propõem dois funcionais, com foco principal em um problema de minimização de massa com restrições de tensão local, resolvido numericamente através do Método Lagrangiano Aumentado. Neste caso, um funcional penaliza os gradientes de densidade visando mitigar o fenômeno do tabuleiro de xadrez e outro funcional penaliza as densidades intermediárias evitando a formação de extensas regiões de cinza. Tal abordagem também é utilizada por Pacheco, Silva e Vale (2020) e Silva, Pereira e Torres (2020) aplicando uma OETC visando a minimização de flexibilidade com restrição de volume.

Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo comparar duas abordagens de distribuições de densidades relativas aos elementos finitos, a saber: elementar (NIU; CHENG; XU, 2010) e nodal (PACHECO; SILVA; VALE, 2020), sendo ambas as abordagens aplicadas em um problema de OETC fundamentado no conceito de uma microestrutura do tipo SIMP (BENDSØE, 1989; BENDSØE; SIGMUND, 1999). Esta comparação é realizada através da solução de um problema de otimização estrutural com minimização de flexibilidade tendo restrição sobre o volume do material (SILVA, 2017). Dois funcionais regularizadores são aplicados à metodologia (PEREIRA, 2001; FANCELLO; PEREIRA, 2003; PEREIRA; FANCELLO; BARCELLOS, 2004). Os resultados obtidos pela abordagem elementar e nodal são analisados considerando a independência de malha, a presença de regiões com densidades intermediárias e de instabilidades numéricas, como o fenômeno de tabuleiro de xadrez.

## FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA

No presente trabalho, é apresentado um problema de OETC tendo como objetivo a mínima flexibilidade com restrição sobre o volume material

considerando distribuição de densidades seguindo uma microestrutura do tipo SIMP (BENDSØE, 1989; BENDSØE; SIGMUND, 1999). Neste tipo de microestrutura é considerada uma variação de densidades relativas,  $\rho$ , entre 1 (material sólido) e 0 (vazio). Além disso, as propriedades elásticas do material, expressas por  $\mathbf{D}_\rho$  através de uma relação de potência, dependem das densidades relativas,  $\rho$ , e do tensor elástico do material sólido para um material isotrópico e contínuo,  $\mathbf{D}_0$  (BENDSØE, 1999). Assim, o problema de OETC com minimização da flexibilidade com restrição sobre o volume material pode ser formulado como:

$$\min_{\rho \in L^\infty(\Omega)} \left[ F(\rho) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla^s \mathbf{u})^T \mathbf{D}_\rho (\nabla^s \mathbf{u}) d\Omega + r_m F_m(\rho) + r_\rho F_\rho(\rho) \right], \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} \mathbf{D}_\rho = \rho^q \mathbf{D}_0, \\ h_V(\rho) = V(\rho) - \lambda V_0 = 0, \\ 0 < \rho_{min} \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases}$$

onde  $\mathbf{u}$  é o campo vetorial de deslocamentos,  $\Omega$  é o domínio do problema,  $\nabla^s$  é o operador de gradiente simétrico,  $\mathbf{D}_\rho$  é o tensor constitutivo do material e  $q$  é a relação de potência do tensor. A restrição de igualdade sobre o volume da estrutura  $V(\rho)$  é dada por uma função que depende de uma parcela  $\lambda$  e do volume inicial  $V_0$ . Ademais,  $\rho_{min}$  é o valor mínimo de densidade admitido. Aqui,  $F_m(\rho)$  e  $F_\rho(\rho)$  são, respectivamente, o funcional responsável por penalizar os valores de densidades intermediária e o funcional responsável por penalizar gradientes de densidade, mitigando, assim, a ocorrência do fenômeno de tabuleiro de xadrez (PEREIRA, 2001; FANCELLO; PEREIRA, 2003; PEREIRA; FANCELLO; BARCELLOS, 2004). Ademais,  $r_m$  e  $r_\rho$  são os parâmetros utilizados para controlar a intensidade de  $F_m$  e  $F_\rho$  no funcional objetivo. As representações matemáticas de tais funcionais são dadas como:

$$F_m(\rho) = \int_{\Omega} \rho(1 - \rho) d\Omega \quad \text{e} \quad F_\rho(\rho) = \int_{\Omega} (\nabla \rho)^T (\nabla \rho) d\Omega. \quad (2)$$

Para a aplicação da abordagem elementar é utilizada uma modificação na formulação do funcional penalizador de gradiente de densidades, apresentada como:

$$F_{\bar{\rho}}(\rho) = \int_{\Omega} [(\rho - \bar{\rho}_s)^2] d\Omega, \quad (3)$$

onde o parâmetro  $\bar{\rho}_s$  é obtido inicialmente realizando uma média de densidade nodal considerando as densidades de cada elemento compartilhado por um dado nó. Para obter o valor da densidade suavizada, avaliada no elemento, é efetuada uma média aritmética simples das densidades nodais para compor o campo de densidade suavizado.

Existem inúmeras alternativas para resolver o problema de otimização, Eq. 1. No corrente trabalho utiliza-se o Método do Lagrangiano Aumentado (BERTSEKAS, 1996). O referido método se baseia na inserção de uma penalização externa quadrática sobre o volume do material,  $r_k$ , e um multiplicador de Lagrange,  $\eta_k$ . Assim, uma sequência de subproblemas com uma restrição sobre o volume do material se torna um problema de otimização sem restrições, dado por:

$$\min_{\rho \in L^\infty(\Omega)} [\bar{L}_k(\rho, \eta_k, r_k) = c(\rho) + r_m F_m(\rho) + r_\rho F_\rho(\rho) + \eta_k h_V(\rho) + r_k h_V(\rho)^2], \quad (4)$$

$$\text{Sujeito a: } \{0 < \rho_{min} \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

A Eq. 4 representa o k-ésimo subproblema de otimização a partir de uma sequência de problemas que devem ser resolvidos (PEREIRA; FANCELLO; BARCELLOS, 2004). Após a convergência de cada um destes subproblemas, os parâmetros  $\eta_k$  e  $r_k$  são atualizados com as seguintes relações (BERTSEKAS, 1996; SILVA, 2017):

$$\eta_{k+1} = \eta_k + 2r_k h_V(\rho), \quad (5)$$

$$r_{k+1} = \min\{zr_k; r_k^{max}\}, \quad \text{com } z > 1 \text{ e } r_k > 0,$$

onde  $z$  define a taxa de aumento de  $r_k$  e  $r_k^{max}$  é o valor limite para  $r_k$ . O Método do Gradiente Conjugado é utilizado para obter a direção de busca e o Método da Seção Áurea obtém o passo ao longo desta direção. Tais métodos são descritos, entre outros textos, em Arora (2017).

Na abordagem nodal, a distribuição de densidades relativas é descrita nos nós da malha de elementos finitos. O elemento utilizado é o Triangular de Deformação Constante (CST). Porém, a avaliação da densidade no elemento é realizada através de uma média simples entre os valores de densidades de cada nó pertencentes ao elemento.

Essa média é aplicada no centroide de cada elemento. Já na abordagem elementar, é atribuído um valor de densidade constante para cada elemento e este é posicionado no centroide do elemento CST como representado na Figura 1:

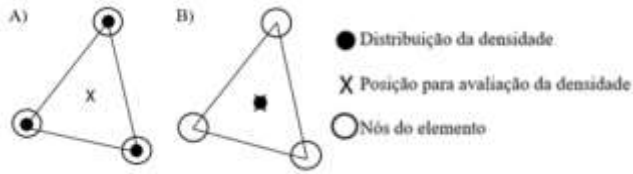


Figura 1. Abordagens A) nodal e B) elementar de distribuição de densidades

A abordagem nodal de distribuição de densidades é apresentada em alguns trabalhos de OETC como Silva (2017) e Pacheco, Silva e Vale (2020).

## METODOLOGIA

Para a realização de uma análise comparativa entre as abordagens elementar e nodal de distribuição de densidades, é utilizado o modelo mecânico, Figura 2, e os parâmetros de otimização, Tabela 1, apresentados em Pacheco, Silva e Vale (2020). As condições de contorno naturais e essenciais foram aplicadas ao longo do comprimento  $L$  para reduzir a concentração de tensões. Este problema é formulado considerando um estado plano de tensão. Em problemas de elasticidade linear plana é comumente utilizado  $q = 3$  (AMSTUTZ, 2011). Para evitar singularidades numéricas é adotado um valor mínimo para densidade  $\rho_{min} = 0,01$  (PEREIRA, 2001). A otimização é implementada com simetria em relação ao eixo vertical. A discretização do domínio é realizada com o padrão de geração de malhas triangulares do tipo *criss-cross*. Os parâmetros penalizadores,  $r_m$  e  $r_\rho$ , são simulados em uma ampla faixa para permitir uma avaliação de sua influência na mitigação das instabilidades numéricas, dependência de malha e tabuleiro de xadrez e na redução das regiões de cinza. Todo este procedimento é realizado no software Matlab®. O campo de densidade inicial é definido como um campo homogêneo satisfazendo a restrição de igualdade no volume do material.

Além disso, a penalidade externa quadrática para o primeiro subproblema,  $r_{ini}$ , é definida como quatro vezes a energia de deformação para o campo de densidade inicial; e seu valor máximo definido como  $r_{max} = 100r_{ini}$ . O multiplicador de Lagrange para o primeiro subproblema é tomado como sendo nulo. Ademais, considera-se que o  $k$ ésimo subproblema converge quando os seguintes critérios são atendidos: (i)  $\|\rho_k - \rho_{k-1}\| < 10^{-3}\sqrt{ndv}$ , (ii)  $\|\bar{L}_k - \bar{L}_{k-1}\| < 10^{-4}\bar{L}_{ini}$  e (iii)  $r_k = r_{max}$ . Nesse caso,  $ndv$  define o número de variáveis de projeto (PACHECO; SILVA; VALE, 2020).

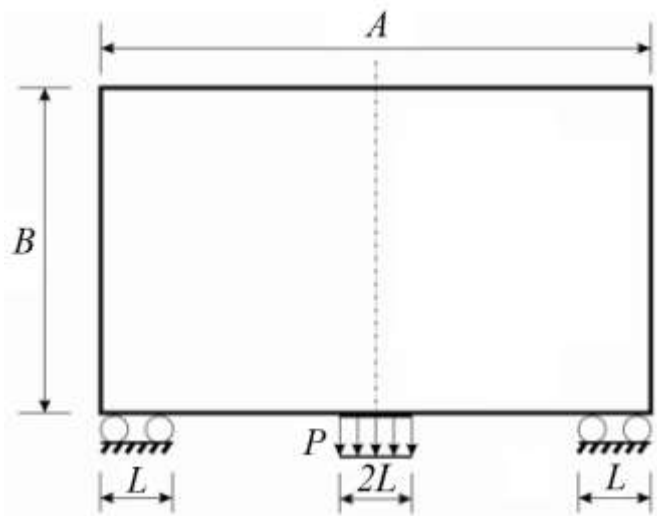


Figura 2. Modelo mecânico (PACHECO; SILVA; VALE, 2020)

Tabela 1. Planejamento numérico

Categoria	Parâmetros	Valores
Propriedades Mecânicas	Módulo de Young [Pa]	1
	Coefficiente de Poisson [-]	0,3
Geometria	A [m]	B [m]
	20	12
Força	Espessura [m]	
	1	
Discretização do Domínio	L [m]	
	1	
Parâmetros de Otimização	P [N]	
	1	
Abordagem nodal	Malha grosseira	<i>Criss-cross</i> [20;24] (1920 elementos)
	Malha fina	<i>Criss-cross</i> [40;48] (7680 elementos)
Abordagem elementar	$\lambda$	0,3
	$z$	1,5
Abordagem nodal	$r_m$ [N.m]	0 0,25 0,50
	$r_\rho$ [N.m³]	0 0,005 0,05 0,5
Abordagem elementar	$r_m$ [N.m]	0 0,25 0,50
	$r_\rho$ [N.m³]	5 10 25 50

Posteriormente, na abordagem elementar, para ambas as malhas, é suposto utilizar-se pares de parâmetros mais adequados, pois o funcional penalizador de gradientes de densidades utilizado tem, aparentemente, uma influência mais suave sobre o problema de otimização. Desta forma são utilizados valores maiores de  $r_\rho$ .



Os resultados apresentados por Pacheco, Silva e Vale (2020) foram obtidos utilizando uma malha com 1920 elementos, Figura 3, e outra composta por 7680 elementos, Figura 4, e aplicando a abordagem nodal. Esses resultados são utilizados aqui para comparar, levando em conta a presença

regiões com densidades intermediárias e instabilidades numéricas, como tabuleiro de xadrez e dependência de malha, com a abordagem elementar apresentada neste trabalho. Análises sugeridas são feitas variando os fatores de penalização,  $r_m$  e  $r_\rho$ .

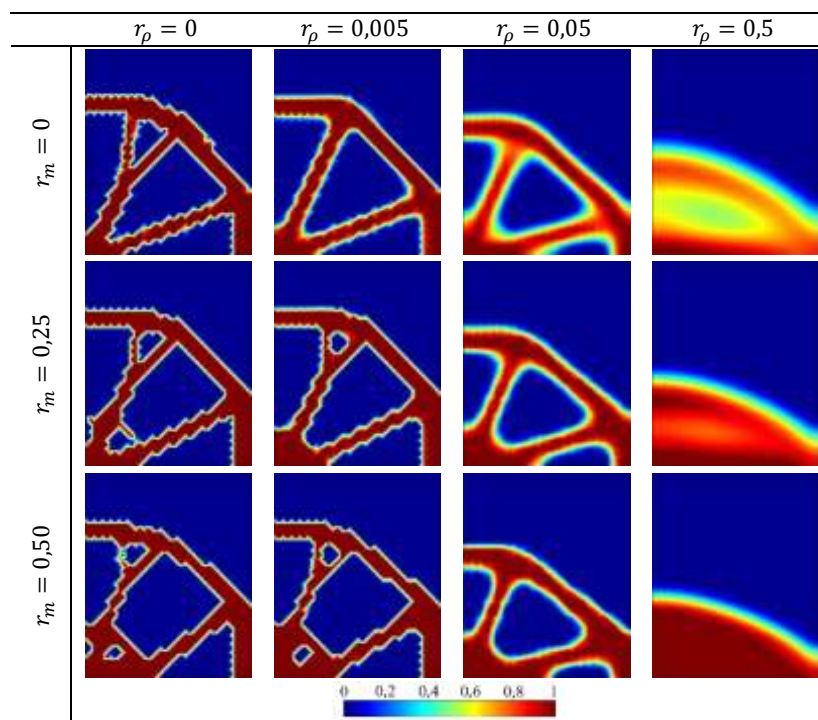


Figura 3. Topologias ótimas, 1920 elementos, em função de  $r_m$  e  $r_\rho$ . Abordagem Nodal (PACHECO; SILVA; VALE, 2020)

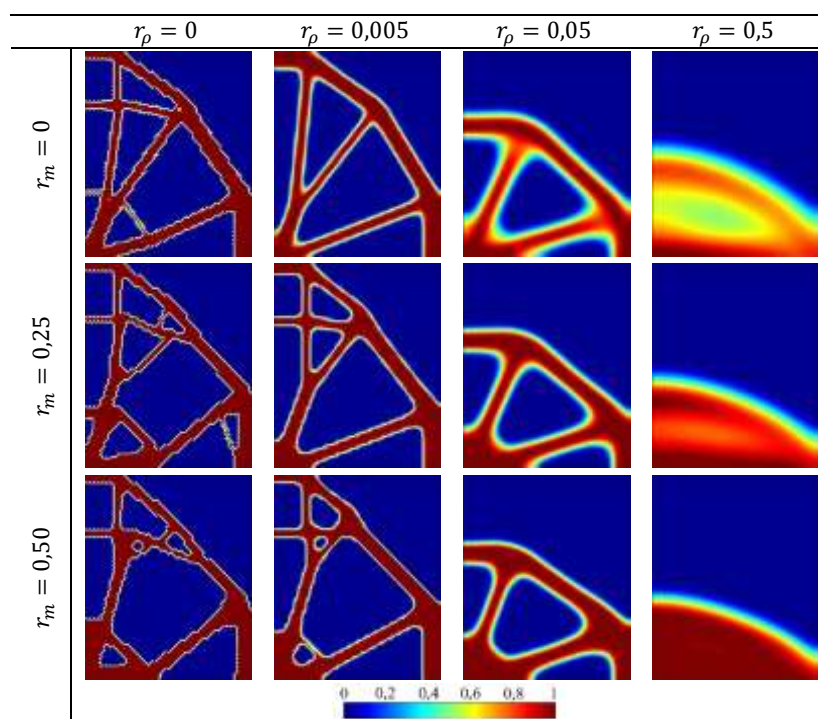


Figura 4. Topologias ótimas, 7680 elementos, em função de  $r_m$  e  $r_\rho$ . Abordagem Nodal (PACHECO; SILVA; VALE, 2020)

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Figura 5 apresenta as topologias ótimas, para a malha com 1920 elementos utilizando a

abordagem elementar de distribuição de densidades, sendo usados os mesmos parâmetros de penalidade presentes na Figura 3.

Comparando os resultados obtidos pelas abordagens elementar e nodal (PACHECO; SILVA; VALE, 2020) percebe-se, na abordagem elementar, a presença significativa de tabuleiro de xadrez na maioria das topologias obtidas. Tal comportamento se justifica visto que o funcional

penalizador de gradientes de densidades na abordagem elementar é calculado de forma que a influência deste se torna mais suave que o funcional utilizado por Pacheco, Silva e Vale (2020).

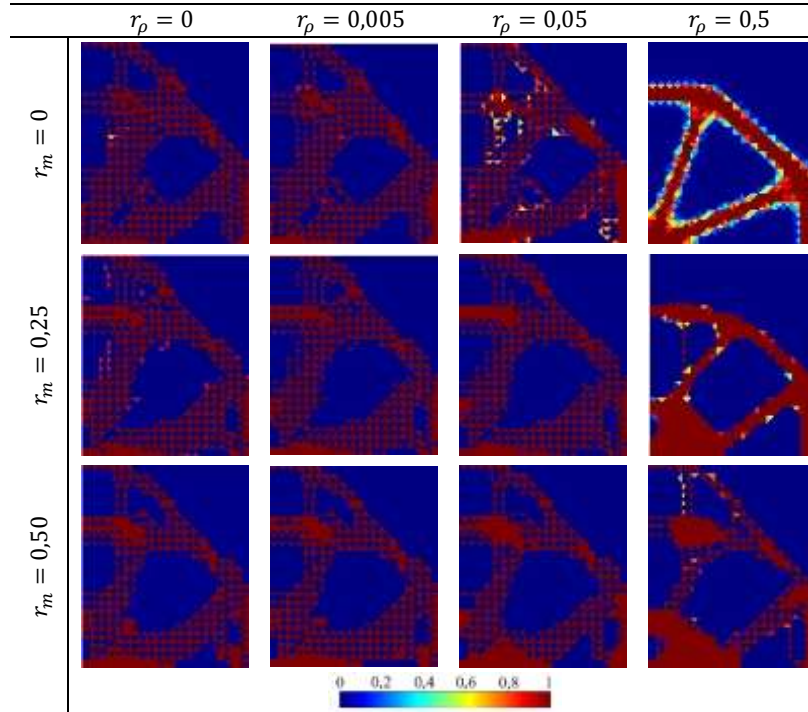
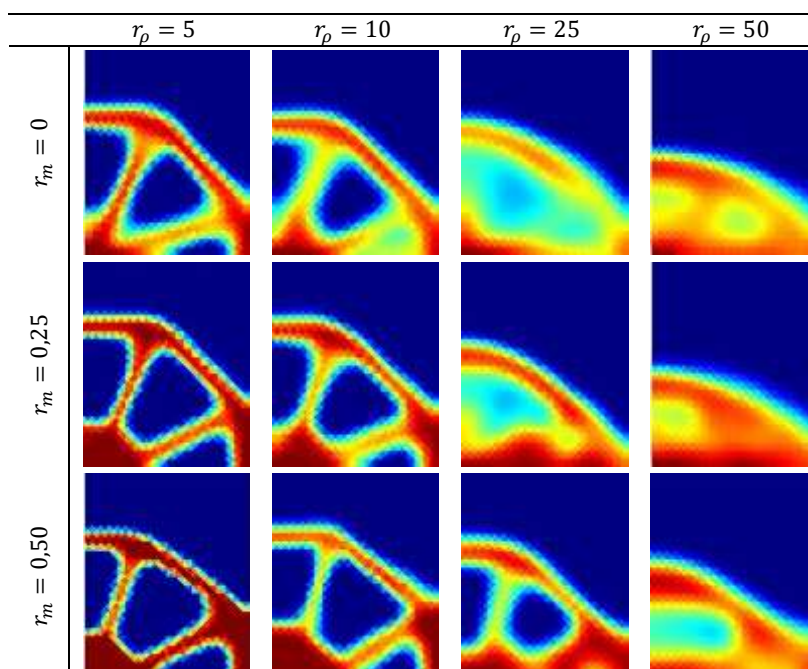


Figura 5. Topologias ótimas, abordagem elementar, 1920 elementos, em função de  $r_m$  e  $r_\rho$ , utilizados por Pacheco, Silva e Vale (2020)

Pode-se observar pela Figura 6 que fixando o fator de penalização de densidades intermediárias,  $r_m$ , é possível notar a influência do fator de penalização do gradiente de densidades  $r_\rho$ . Aumentando o parâmetro  $r_\rho$  o número de ramificações na topologia reduz, um aumento na suavidade do contorno material e um

aumento na quantidade de regiões com densidades intermediárias. Por outro lado, variando o fator  $r_m$  para um parâmetro  $r_\rho$  fixo, notam-se contornos mais definidos nas estruturas com valores maiores de  $r_m$  e uma mitigação de regiões com densidades intermediárias.



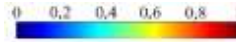


Figura 6. Topologias ótimas, abordagem elemental, 1920 elementos,  $r_m$  e  $r_\rho$  adequados

parâmetro  $r_\rho$ , na abordagem elemental com a malha fina, tem-se as topologias ótimas apresentadas na Figura 7:

Utilizando da mesma solução para o

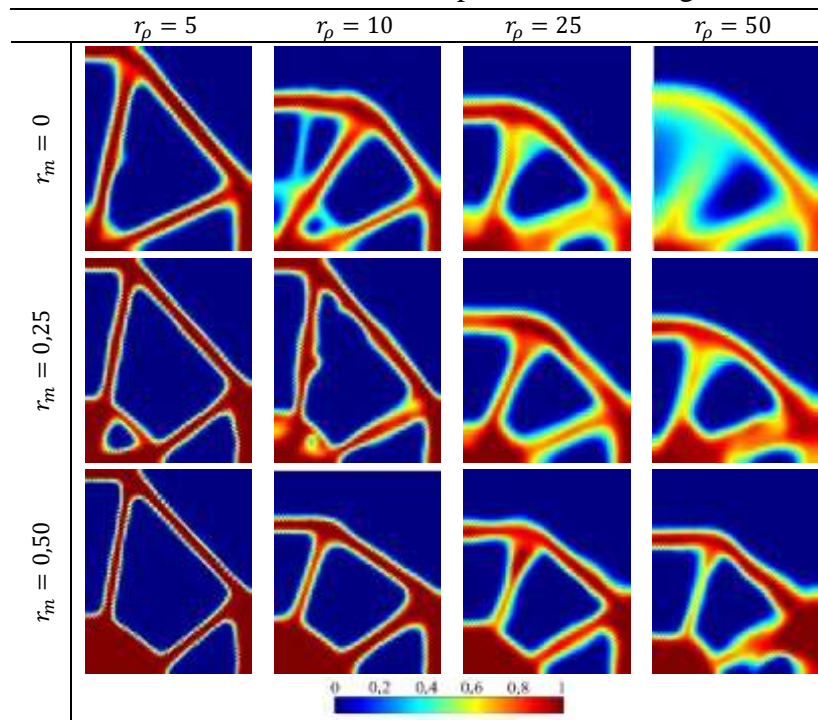


Figura 7. Topologias ótimas, abordagem elemental, 7680 elementos,  $r_m$  e  $r_\rho$  adequados

O comportamento das topologias, na abordagem elemental, na malha com 7680 elementos ocorre de forma semelhante àquelas apresentadas pela malha grosseira, porém, com valores mais baixos de  $r_\rho$ , as topologias apresentam mais ramificações.

Analisando as topologias obtidas pelas malhas grosseira e fina, na abordagem elemental, Figura 8, não se pode confirmar a independência de malha, visto que comparando as topologias de cada malha, geradas com os mesmos parâmetros, estas não apresentam semelhança.

Figura 8. Topologias ótimas  $r_\rho = 10$  comparação entre malhas. Abordagem Elemental

Observando a Figura 9 se tem a comparação qualitativa de duas topologias ótimas obtidas pela malha fina, entre as abordagens nodal e elemental. São utilizados, na abordagem nodal e elemental, respectivamente, os pares de parâmetros penalizadores  $r_m = 0,25$  e  $r_\rho = 0,05$  e  $r_m = 0,25$  e  $r_\rho = 25$ . Pode-se avaliar que a topologia obtida pela abordagem nodal se mostra com contornos mais definidos e suaves que a topologia obtida pela abordagem elemental.

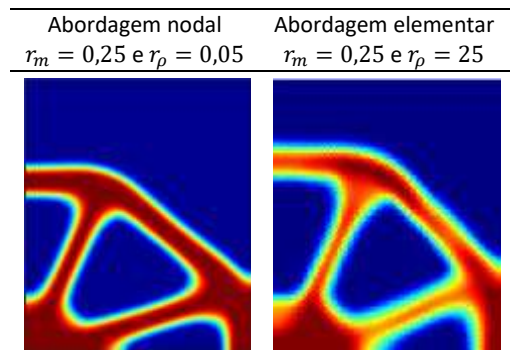
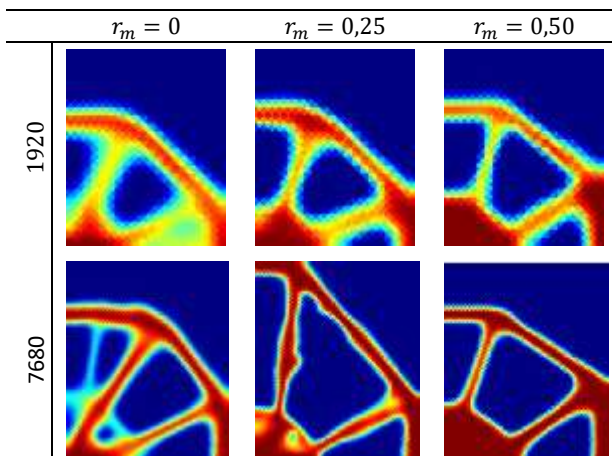


Figura 9. Comparação qualitativa entre abordagens nodal e elemental, 7680 elementos (Adaptado de Pacheco, Silva e Vale (2020))

### CONCLUSÃO



O presente trabalho compara diferentes distribuições de densidades para a solução de um problema de otimização topológica com minimização de flexibilidade e restrição sobre o volume do material. A partir da análise das topologias ótimas obtidas pelos vários pares de parâmetros penalizadores  $r_m$  e  $r_p$  e pelas diferentes discretizações, pode-se observar que a abordagem elementar se mostra menos eficiente do que a nodal, destacando-se que:

(a) Em uma comparação qualitativa, as topologias obtidas pela abordagem elementar apresentam um resultado com um aspecto mais grosseiro do que as topologias obtidas pela abordagem nodal. Isso evidencia que a abordagem nodal, utilizada por Pacheco, Silva e Vale (2020), obtém resultados melhores para o problema otimizado, mesmo utilizando um número menor de variáveis de projeto, que o mesmo problema de otimização topológica resolvido a partir da abordagem elementar.

(b) Não foi encontrado um par de parâmetros para a abordagem elementar, que promova a independência de malha. Condição esta, que foi observada para a abordagem nodal.

## AGRADECIMENTOS

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná, à Universidade Federal do Paraná e a Fundação Araucária pela bolsa de projeto de pesquisa.

## LITERATURA CITADA

ALLAIRE, G.; KOHN, R. V. Topology optimization and optimal shape design using homogenization. *Topology Design of Structures*, Kluwer, Boston, p.207–218, 1993.

AMSTUTZ, S. Connections between topological sensitivity analysis and material interpolation schemes in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.43(6), p.755–765, 2011.

AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A. A. Topological optimization of structures subject to

von Mises stress constraint. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.41, p.407–420, 2010.

ARORA, J. S. *Introduction to Optimum Design*. Elsevier Academic Press, Massachusetts, 2017.

BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, v.1, p.193–202, 1989.

BENDSØE, M. P. Variable Topology Optimization: Status and Challenge. In: *European Conference on Computational Mechanics*, v.2, p.1–18, 1999.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, v.69, p.635–654, 1999.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. *Topology Optimization: Theory, Method and Application*. Springer, Berlin, 2003.

BERTSEKAS, D. P. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Athena Scientific, Nashua, 1996.

DIJK, N. P.; MAUTE, K.; LANGELAAR, M.; KEULEN, F. Level-set methods for structural topology optimization: a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.48, p.437–472, 2013.

EMMENDOERFER, JR. H.; FANCELLO, E. A. A level set approach for topology optimization with local stress constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.99, p.129–156, 2014.

FANCELLO, E. A.; PEREIRA, J. T. Structural topology optimization considering material failure constraints and multiple load conditions. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v.1(1), p.3–24, 2003.

HABER, R. B.; JOG, C. S.; BENDSØE, M. P. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter. *Structural Optimization*,



v.11(1–2), p.1–12, 1996.

NIU, F.; CHENG, G.; XU, S. A general formulation of structural topology optimization for maximizing structural stiffness. Springer-Verlag, 2010.

NOVOTNY, A. A.; SOKOLOWSKI, J. Topological Derivatives in Shape Optimization, Springer, Berlin, 2013.

PACHECO, J. P. F. R.; SILVA, J.; VALE, J. L. Assessment of penalty parameters in density-based topology optimization. In: Proceedings of the XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC, Foz do Iguaçu, 2020.

PAYTEN, W. M.; BEN-NISSAN, B.; MERCER, D. J. Optimal Topology Design using a global self organisational approach. International Journal of Solids and Structures, v.35, p.219–237, 1998.

PEREIRA, J. T. Otimização Topológica de Componentes Mecânicos com Restrições sobre o Critério de Falha Material. 2001. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Florianópolis.

PEREIRA, J. T.; FANCELLO, E. A.; BARCELLOS, C. S. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. Structural and Multidisciplinary Optimization, v.26, p.50–66, 2004.

PETERSSON, J.; SIGMUND, O. Slope constrained topology optimization. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.41, p.1417–1434, 1998.

SIGMUND, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization.

Mechanics of Structures and Machines, v.25, p.493–524, 1997.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. Structural Optimization, v.16, p.68–75, 1998.

SILVA, J. Otimização Estrutural Topológica usando Método dos Elementos Finitos h-Adaptativo Fundamentado na Recuperação da Densidade do Erro Isotrópica e Anisotrópica. 2017. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Paraná, UFPR, Curitiba.

SILVA, J.; PEREIRA, J. T.; TORRES, D. A. F. h-adaptive topology optimization considering variations of material properties and energy error density recovery. Engineering Computations, v.37(9), p.3209-3241, 2020.

SOUZA, L. A. F. Modelo Numérico Anisotrópico de Remodelação Óssea Interna Fundamentado na Mecânica do Dano Contínuo. 2009. Tese (Doutorado em Ciências) - Universidade Federal do Paraná, UFPR, Curitiba.

WANG, M.; WANG, X.; GUO, D. A level set method for structural topology optimization. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.192, p.227-246, 2003.