

REVISTA

Cadernos de Educação

FaE | PPGE | UFPel

ARTIGO | Fluxo contínuo

A introdução do conceito de derivada no ensino secundário em Portugal e no Brasil no Século XX

The introduction of the concept of derivative in secondary education
in Portugal and Brazil in the twentieth century

La introducción del concepto de derivada en la enseñanza escolar
en Portugal y Brasil en el siglo XX

Circe Mary Silva da Silva
António Domingos

RESUMO

Este estudo tem como objetivo analisar a introdução do conceito de derivada no ensino secundário do Brasil e de Portugal ao longo do século XX, identificando aproximações e distanciamentos nas abordagens adotadas em ambos os países. A investigação fundamentou-se na análise documental, tendo como corpus programas oficiais de ensino, sete livros didáticos de Matemática – cinco brasileiros e dois portugueses –, além de teses, livros e artigos especializados. Como referencial teórico, adotou-se a Teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall, que distingue os mundos corporificado, simbólico e formal, permitindo examinar as diferentes formas de apresentação e desenvolvimento do conceito de derivada nos materiais analisados. Os resultados indicam que, entre as décadas de 1940 e 1970, as abordagens presentes nos livros brasileiros apresentaram relativa uniformidade, predominando uma perspectiva formalizada do conceito. Em Portugal, por sua vez, observou-se a preferência por abordagens que articulavam elementos corporificados e formais. Uma diferença significativa entre os dois contextos refere-se à presença do Cálculo Diferencial no currículo do ensino secundário: enquanto no Brasil esse conteúdo foi gradualmente suprimido a partir da década de 1970, em Portugal consolidou-se como componente curricular e permanece presente até os dias atuais. O estudo contribui para a compreensão histórica da circulação e da institucionalização de saberes matemáticos escolares em diferentes contextos nacionais.

Palavras-chave: cálculo diferencial e integral; história do ensino da matemática; livros didáticos.

ABSTRACT

This study aims to analyze the introduction of the concept of derivatives in secondary education in Brazil and Portugal throughout the 20th century, identifying similarities and differences in the approaches adopted in both countries. The research was based on document analysis, using as its corpus official teaching programs, seven mathematics textbooks – five Brazilian and two Portuguese – as well as theses, books, and specialized articles. As a theoretical framework, the Theory of the Three Worlds of Mathematics, proposed by David Tall, was adopted, which distinguishes the embodied, symbolic, and formal worlds, allowing for the examination of the different forms of presentation and development of the concept of derivatives in the analyzed materials. The results indicate that, between the 1940s and 1970s, the approaches present in Brazilian textbooks showed relative uniformity, with a formalized perspective of the concept predominating. In Portugal, on the other hand, a preference was observed for approaches that articulated embodied and formal elements. A significant difference between the two contexts concerns the presence of Differential Calculus in the secondary school curriculum: while in Brazil this content was gradually suppressed from the 1970s onwards, in Portugal it became established as a curricular component and remains present until today. This study contributes to the historical understanding of the circulation and institutionalization of school mathematical knowledge in different national contexts.

Keywords: differential and integral calculus; history of mathematics teaching; textbook.

RESUMEN

Este estudio tiene como objetivo analizar la introducción del concepto de derivadas en la educación secundaria en Brasil y Portugal a lo largo del siglo XX, identificando similitudes y diferencias en los enfoques adoptados en ambos países. La investigación se basó en el análisis documental, utilizando como corpus programas de enseñanza oficiales, siete libros de texto de matemáticas —cinco brasileños y dos portugueses—, así como tesis, libros y artículos especializados. Como marco teórico, se adoptó la Teoría de los Tres Mundos de las Matemáticas, propuesta por David Tall, que distingue los mundos corporizado, simbólico y formal, permitiendo examinar las diferentes formas de presentación y desarrollo del concepto de derivadas en los materiales analizados. Los resultados indican que, entre las décadas de 1940 y 1970, los enfoques presentes en los libros de texto brasileños mostraron una relativa uniformidad, predominando una perspectiva formalizada del concepto. En Portugal, por otro lado, se observó una preferencia por enfoques que articulaban elementos corporizados y formales. Una diferencia significativa entre ambos contextos radica en la presencia del Cálculo Diferencial en el currículo de la educación secundaria: mientras que en Brasil este contenido se fue eliminando gradualmente a partir de la década de 1970, en Portugal se consolidó como un componente curricular y se mantiene vigente hasta la actualidad. Este estudio contribuye a la comprensión histórica de la circulación e institucionalización del conocimiento matemático escolar en diferentes contextos nacionales.

Palavras-clave: cálculo Diferencial y integral; historia de la enseñanza de las matemáticas; libros de texto.

Introdução: discutindo um panorama internacional

Portugal, assim como a França, destacou-se entre os países pioneiros na renovação da educação matemática ao incorporar, ainda nas primeiras décadas do século XX, noções fundamentais de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) aos currículos do ensino secundário. Contudo, a presença do CDI como componente obrigatório da formação matemática escolar em diferentes contextos nacionais constitui uma questão complexa, que não pode ser compreendida de forma homogênea. As configurações assumidas pelo ensino desse conteúdo estiveram condicionadas às especificidades dos sistemas educacionais, envolvendo fatores de natureza política, curricular e institucional, bem como aspectos relacionados à formação docente, às práticas de ensino e aos processos de aprendizagem dos estudantes (Burkhardt, 2014). Desse modo, a análise da trajetória do CDI no ensino secundário requer considerar as particularidades históricas e culturais de cada país, sem perder de vista os movimentos internacionais de circulação de ideias e de modernização do ensino da Matemática.

À época, não havia consenso quanto à inclusão do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) no ensino secundário,¹ conforme evidenciado pelo relatório do matemático húngaro Emanuel Beke, elaborado para a Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI). Dos dezoito países que participaram da enquete, doze declararam ensinar CDI, embora esse conteúdo não estivesse presente em todos os tipos de estabelecimentos de ensino secundário (Beke, 1914). Com base na análise de artigos e relatórios publicados no periódico *L'Enseignement Mathématique* entre 1900 e 1970, foi possível identificar três momentos distintos na trajetória do ensino de CDI nas escolas secundárias. O primeiro corresponde às primeiras décadas do século XX, período em que, diante das demandas de modernização do ensino da Matemática, surgiram iniciativas pioneiras de introdução do CDI nos currículos escolares. O segundo abrange o período entre guerras e os anos subsequentes à Segunda Guerra Mundial, quando o CDI foi incorporado aos programas de ensino de alguns

¹ A terminologia escola secundária é usada em Portugal. No Brasil, atualmente, corresponde ao ensino médio. Usaremos, no presente trabalho, o termo “ensino secundário”, para designar a escolaridade que antecede o ensino superior.

países, como Brasil, Grécia e Espanha, ao passo que foi retirado de outros, como a União Soviética. O terceiro momento inicia-se com o Movimento da Matemática Moderna e suas repercussões sobre o ensino de CDI, configurando uma segunda onda de modernização curricular marcada por novos debates acerca dos conteúdos e métodos de ensino da Matemática.

No primeiro período identificado, a França destacou-se como pioneira ao introduzir o Cálculo Diferencial e Integral (CDI) no currículo do ensino secundário em 1902. Outros países, como China, Portugal, Suécia, Rússia e Hungria, também passaram a incorporar conteúdos relacionados ao CDI nas primeiras décadas do século XX. Em Portugal, a reforma curricular de 1905 previa, na disciplina de Álgebra da 7ª classe dos liceus, o estudo da noção de derivada, sua interpretação geométrica, as derivadas de soma, produto, quociente, potência e raiz, bem como das funções circulares, culminando com revisões dos conteúdos abordados. A implementação dessa proposta foi acompanhada pela publicação de manuais didáticos específicos, entre os quais se destacam Álgebra para o ensino da VI e VII classe dos liceus, de Joaquim d'Azevedo Albuquerque (1906), Complementos de Álgebra, de Eduardo Ismael dos Santos Andrea (1909), e Álgebra Elementar, de José Manuel Rodrigues (1909) (Pinto, 2012; Andrea, 1909; Dias, 2022). Nessas obras, os conteúdos de CDI encontravam-se integrados ao ensino da Álgebra e contemplavam, além da definição e da interpretação geométrica da derivada, algumas regras de derivação e exercícios de aplicação.

Entretanto, conforme observa Artigue (2003), a presença do CDI nos currículos secundários do início do século XX ainda era relativamente limitada. Embora representasse um importante movimento de renovação curricular, a geometria permanecia como eixo predominante da formação matemática escolar. Nesse contexto, o ensino da análise – compreendendo sobretudo o CDI – possuía objetivos modestos, voltados ao desenvolvimento de competências elementares de cálculo consideradas úteis para a formação dos estudantes. As justificativas para sua introdução eram diversas e refletiam demandas educacionais, científicas e sociais mais amplas, incluindo a modernização do ensino da Matemática, a aproximação entre ensino secundário e superior, a preparação dos estudantes para os cursos universitários e a adequação da formação escolar às exigências da indústria, do comércio e do progresso

científico e tecnológico.

No segundo período, nos anos finais da década de 1920 e da década de 1930, os sistemas escolares de muitos países europeus foram submetidos a várias reformas (Zuccheri; Zudini, 2014). O estudo das funções e o CDI foram incluídos, em alguns lugares, nos programas das escolas científicas secundárias. No entanto, na década de 1930, o CDI foi reduzido em alguns países, como Portugal e Rússia (URSS). Em Portugal, em 1936, o CDI foi excluído do ensino secundário e reintroduzido em 1947. Na URSS, as mudanças curriculares ocorridas na década de 1930 excluíram o CDI do ensino secundário e ele só voltaria a integrar o currículo na década de 1970.

No Brasil, o CDI foi introduzido na década de 1930². Internacionalmente, as justificativas para a sua introdução, nesse período, eram de que o conhecimento do CDI devia fazer parte da formação do homem culto, necessitando-se dele para aplicações às ciências e atividades sociais. Outra razão invocada, à época, era a de que, pelo ensino do CDI, ter-se-ia a dimensão do alcance do desenvolvimento da matemática.

No terceiro período, após a Segunda Guerra Mundial, a população estudantil expandiu-se na maioria dos países, particularmente no nível secundário. Nos países em desenvolvimento, ocorreu um movimento para abandonar uma escola de elite em prol de uma escola mais ampla, que oferecesse acesso a uma maior quantidade de alunos. Nos países desenvolvidos, foram criados sistemas universais para acesso à universidade, o que ampliou o contingente de alunos no ensino superior. Líderes políticos como os do Japão acreditavam que os currículos estavam defasados, e que era preciso uma educação tecnológica mais avançada para fazer frente ao forte crescimento da indústria - a matemática ocupava o epicentro (Blij; Hilding; Weinzwieg, 1981).

No início dos anos 70, com o movimento da matemática moderna, novas ambições para o ensino de matemática surgiram. Para Artigue (2003), em muitos países, incluindo França, havia uma abordagem da análise como um campo estruturado – conceitos definidos formalmente e a análise se libertando da

² No final do século anterior, na Reforma Educacional de Benjamin Constant, o CDI foi introduzido, mas seu ensino durou muito pouco, sendo abolido já nos primeiros anos do século XX.

álgebra, no ensino secundário. Na União Soviética, havia nessa época cursos de matemática escolar cujo propósito era a inculcação sistemática nos alunos da visão marxista-leninista do mundo e que pudesse despertar o interesse na matemática e suas aplicações (Kolyagin; Lukankin; Oganessian, 1980). A mudança mais significativa ocorrida em muitos países foi a proposta de um currículo integrado para o ensino secundário através de conceitos unificadores, como funções e conjuntos, a inclusão de novos ramos do conhecimento e probabilidade, estatística e computação. Além disso, tornaram-se mais rigorosas as formulações de noções básicas, com apoio na matemática moderna, tanto na geometria como na análise. A geometria espacial e a resolução de triângulos em trigonometria foram eliminadas e o cálculo expandido. A geometria ficou mais restrita ao ensino elementar (Blij; Hilding; Weinzweig, 1981).

Nos Estados Unidos da América, o malogro com a matemática moderna começou a ser sentido já na década de 1970, quando um retorno ao básico parecia ser a única alternativa. No que se refere ao ensino secundário, o objetivo dos cursos de matemática era uma preparação para o estudo de CDI na universidade. No mundo árabe, por sua vez, a matemática moderna foi uma propulsora para o ensino do CDI, que incluiu a lógica. Na maioria dos países, o estudo de funções e do cálculo diferencial prevaleceu em detrimento do cálculo integral, que poucos países implementaram (Silva, 2026).

Objetivo e metodologia da pesquisa

O presente estudo integra um projeto de pesquisa mais amplo dedicado à investigação dos processos de escolarização do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) no Brasil.³ Especificamente, busca analisar a introdução do conceito de derivada no ensino secundário brasileiro e português ao longo do século XX, por meio da análise de livros didáticos de Matemática, identificando aproximações e diferenças nas formas de abordagem desse conteúdo em ambos os países. A escolha de Portugal como objeto de comparação justifica-se por sua posição pioneira na Europa ao incorporar o CDI ao currículo do ensino secundário, em 1905. Entre os conceitos fundamentais que compõem o CDI destacam-se

³ Pesquisa financiada pelo CNPq (Processo: 403837/2021-9).

função, limite, continuidade, derivada e integral. Neste estudo, o foco recai sobre o conceito de derivada por se tratar de um conteúdo cujas aplicações são passíveis de abordagem no ensino secundário e, sobretudo, por sua estreita relação com o conceito de limite, considerado um marco na transição entre a matemática elementar e a matemática avançada.

Estamos cientes da dificuldade e dos desafios de uma pesquisa comparativa em educação, uma vez que os contextos são diferentes. Entretanto, já existem estudos comparativos na história da educação matemática, conforme citamos no início desta pesquisa, quando o próprio ICMI sugeriu que se investigasse sobre o ensino do cálculo diferencial e integral nas escolas secundárias dos 18 países integrantes daquela comissão à época. Isso nos motivou a lançarmos um olhar específico a Portugal e Brasil, países de mesma língua e que mantinham relações amistosas. Ambos detinham à época governos políticos autoritários que tiveram reflexo na educação. Embora as reformas tenham sido implementadas com diferenças. No Brasil, no Estado Novo, o livro didático serviria como um veículo da política unificadora do Estado, o país buscava por meio da “educação uma legitimação do próprio governo” (Rota, 2013). Por sua vez, em Portugal, o governo de Salazar implantou mudanças na política do livro didático. Podemos concordar com Rota (2013) de que o livro didático foi fundamental na formação do cidadão, uma referência para professores e alunos.

Partimos do entendimento, compartilhado por Choppin (2002), de que os livros didáticos constituem fontes privilegiadas para a compreensão da cultura escolar. Esta, por sua vez, pode ser definida, conforme Benito (2017, p. 119), como o “conjunto de práticas e discursos que regularam ou regulam a vida das instituições de educação formal e a profissão docente”. Nessa perspectiva, os livros didáticos são compreendidos como elementos estruturantes da cultura escolar, uma vez que historicamente desempenham papel central na organização das práticas pedagógicas e na circulação dos saberes escolares (Vidal, 2009). Assim, os manuais analisados foram tomados como fontes principais da investigação, permitindo identificar como autores brasileiros e portugueses conceberam e sistematizaram a introdução do CDI no ensino secundário.

A delimitação temporal do estudo compreende o período entre 1940 e

1970, intervalo em que o CDI esteve presente nos currículos do ensino secundário de ambos os países. Foram selecionados os livros didáticos adotados ou oficialmente recomendados para o ensino nesse período. No caso brasileiro, o corpus documental é composto por cinco obras de diferentes autores. Em Portugal, em razão da política de adoção de livro único, foram analisadas duas obras: a de António Augusto Lopes, aprovada para uso entre 1950 e 1955, e a de José Sebastião e Silva, em coautoria com José da Silva Paulo, aprovada em 1955 e utilizada durante um longo período como manual oficial do ensino secundário.

A pesquisa, de natureza qualitativa e fundamentada na análise documental, desenvolveu-se por meio das seguintes etapas: levantamento e seleção das fontes documentais, incluindo programas oficiais e livros didáticos; organização do corpus documental por país; comparação entre os programas prescritos e os conteúdos efetivamente apresentados nos manuais; levantamento de informações biográficas sobre os autores; identificação e análise dos capítulos dedicados ao conceito de derivada; seleção das unidades de significado relevantes para a investigação; e, por fim, interpretação dos dados à luz do referencial teórico adotado.

O Quadro 1 relaciona os autores selecionados, o título das obras e as respectivas edições, sendo os cinco primeiros itens referentes ao Brasil e os dois últimos a Portugal.

Quadro 1 – Relação de autores, livros didáticos e edições (Brasil e Portugal)

Autor/Autores	Título	Edições
1. Thales de Faria Mello Carvalho	Matemática para os cursos clássico e científico – 3º ano	1ª em 1943; 2ª em 1948; 6ª em 1956; livro único em 1969
2. Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha e Cesar Dacorso Neto	Matemática 2º Ciclo	1ª em 1947 ⁴ ; 2ª em 1946; 3ª em 1951, 4ª em 1955; 5ª em 1956
3. Algacyr Munhoz Maeder	Curso de Matemática – 3º livro – ciclo colegial	1ª em 1944; 2ª em 1949; 3ª em 1953; 5ª em 1955; 7ª em 1959

⁴ O ponto de interrogação significa o desconhecimento do ano preciso da edição, uma vez que alguns livros não incluíram o ano em que foram editados.

4. Manoel Jairo Bezerra	Curso de Matemática para os primeiro, segundo e terceiro anos dos cursos clássico e científico – livro único	1ª em 1953; livro único 24ª em 1969; 28ª em 1971; 32ª em 1975
5. Ary Quintella	Matemática – terceiro ano colegial	1ª em 1957; 9ª em 1960; 16ª em 1968
6. Antônio Augusto Lopes	Compêndio de álgebra para o 6º ano dos liceus	1ª em 1950; 2ª em 1955
7. José Sebastião e Silva; José da Silva Paulo	Compêndio de álgebra para o 6º ano dos liceus	1ª em 1956; 2ª em 1957; 10ª em 1974

Fonte: dados trabalhados pelos autores.

Para interpretar as abordagens do conceito de derivada presentes nos livros didáticos analisados, recorreremos à Teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall (2013). Segundo esse autor, o pensamento matemático pode ser compreendido a partir de três modos complementares de construção do conhecimento. O primeiro é o mundo corporificado (*embodied world*), fundamentado na percepção, na visualização e nas experiências sensoriais relacionadas aos objetos matemáticos, favorecendo uma compreensão mais intuitiva dos conceitos. O segundo é o mundo simbólico (*symbolic world*), caracterizado pelo uso de símbolos, expressões e procedimentos algébricos e aritméticos, no qual os conceitos matemáticos são manipulados por meio de operações e cálculos. O terceiro é o mundo formal axiomático (*formal axiomatic world*), associado à estrutura lógica e dedutiva da Matemática, em que definições, axiomas, teoremas e demonstrações constituem a base para a construção rigorosa do conhecimento matemático. Essa perspectiva teórica permite analisar não apenas os conteúdos apresentados nos livros didáticos, mas também as diferentes formas de representação e compreensão mobilizadas na introdução do conceito de derivada.

De uma matemática prática, em que estão envolvidos números e formas geométricas, o pensamento progride para uma matemática teórica – da álgebra e geometria euclidiana. Segundo a explicação de Tall (2013, p. 402-403):

Enquanto a geometria se constrói através do aumento da sofisticação estrutural, o simbolismo se desenvolve através da compressão operacional das operações incorporadas ao simbolismo manipulável que então tem propriedades estruturais que desenvolvem suas próprias formas de definição e prova.

Finalmente, o terceiro mundo, da matemática formal axiomática, constrói

um nível formal baseado na definição da teoria dos conjuntos e nas demonstrações formais. A teoria de Tall (2013), que traz a ideia dos três mundos, serviu como inspiração e base para escolhermos as categorias de abordagem apresentadas nos livros didáticos escolhidos. No presente estudo, a abordagem do conceito de derivada foi feita a partir das seguintes categorias: corporificada, simbólica, formal e mescladas.

Resultados

Os resultados estão divididos em quatro itens: 1) programas oficiais – possibilitar uma visão geral do ensino do CDI previsto nas legislações de cada país; 2) autores dos livros brasileiros e portugueses – apresentar um esboço biográfico sumário dos personagens; 3) abordagem do conceito de derivada nos livros brasileiros – sistematizar como os autores abordaram a derivada no Brasil; 4) abordagem do conceito de derivada nos livros portugueses – sistematizar como os autores abordaram a derivada em Portugal.

Programas Oficiais

O CDI era assunto que integrava a disciplina de matemática para o ensino secundário em ambos os países, segundo os programas oficiais de cada país. No Quadro 2, estão descritos os conteúdos propostos em cada país na década de 1940.

Quadro 2 – Programas de matemática que abordam o CDI em Portugal e no Brasil

Brasil: Lei Orgânica de 1942	Portugal: Programas de 1948
Para o 3º ano do ciclo colegial, na disciplina de matemática, na parte de álgebra, estava previsto o tópico funções, com as seguintes especificações: noção de função e de variável real, representação cartesiana, noção de limite e continuidade; derivadas definição, interpretação geométrica e cinemática, cálculo das derivadas, derivação das funções elementares, aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples (Brasil, 1943, p. 4, grifo nosso).	Para o 6º e 7º anos dos liceus, está prevista a seguinte ordenação dos conteúdos, para o 6º ano : variável e função; infinitamente grandes, infinitésimos, limites, operações com limites; continuidade de uma função. Para o 7º ano : o problema das tangentes e o das velocidades; noção de derivada de uma função num ponto ; função derivada; derivadas das funções algébricas e das funções circulares diretas; derivada da função de função. (Decreto 37.112).

Constatamos que em ambos os países – Portugal e Brasil – as prescrições oficiais incluíam os conceitos de função, limites, continuidade e derivadas. Entretanto, o conceito de integral não aparece em nenhum desses países, nessa década. Na década subsequente, porém, no Brasil, ele integrará o programa oficial. À época, o ensino de CDI estava previsto apenas para o ciclo colegial (uma das ramificações do ensino secundário), no Brasil, enquanto, em Portugal, ele estava indicado para os liceus, ou seja, todo o ensino secundário.

Quanto à derivada, percebem-se nuances nas prescrições. Por exemplo: em Portugal, o CDI deveria integrar os conteúdos de matemática em dois anos escolares - o 6º e 7º anos: no 6º ano, a prescrição era o estudo de funções, limites e continuidade; no 7º ano, estava previsto apenas o estudo de derivada. Diferentemente, no Brasil, o CDI constava do programa do último ano do secundário. Inclusive a própria ordenação dos conteúdos revela a abordagem a ser seguida: no Brasil, o estudo de derivada começa com a definição, enquanto em Portugal, inicia com o problema das tangentes e velocidades, ou seja, por uma motivação de aplicação do conceito a ser introduzido. Em Portugal, no período investigado, não há alterações dos conteúdos.

Programas Oficiais

Os autores citados na Quadro 1 exerceram um papel de liderança na educação matemática, quer como professores de matemática quer como matemáticos. Procuramos apresentar alguns dados biográficos dos autores, aqueles que encontramos, com o intuito de mostrar como matemáticos ou professores de matemática se envolveram na produção de livros de matemática à época. Identificamos, no Brasil, como professor de matemática e autor de programas oficiais para o ensino, Euclides Roxo (1890-1950). Em Portugal, José Sebastião e Silva (1914-1972), que foi um matemático e professor de matemática influente no sistema de educação oficial daquele país.

A coleção “Matemática 2º ciclo” foi um trabalho coletivo de quatro autores: Euclides Roxo, Roberto José Fontes Peixoto, Haroldo Cunha e Cesar Dacorso Neto. Haroldo Lisboa da Cunha (1909- 1991), engenheiro e professor do Colégio

Pedro II, alcançou o cargo de reitor da Universidade do Estado do Rio de Janeiro; Roberto José Fontes Peixoto (1901-?) era engenheiro e professor do Instituto de Educação do Distrito Federal e Cesar Dacorso Netto, professor do Instituto de Educação do Distrito Federal e docente universitário; Euclides Roxo (1890-1950), engenheiro e professor de matemática, foi o responsável pela elaboração dos programas de matemática de 1942, na reforma Capanema. Segundo Duarte (2021), Euclides Roxo, ao apropriar-se das discussões internacionais sobre o ensino da Matemática, tornou-se personagem determinante para a presença do componente curricular intitulado Matemática. Além disso, incluiu no programa de álgebra do 3º ano científico do secundário, os conteúdos de Cálculo Diferencial.

Manoel Jairo Bezerra foi professor de várias instituições, tanto de ensino secundário quanto superior, entre as quais, o Colégio Pedro II e o Colégio Naval (Domingues, 2022). Foi autor de muitas obras didáticas para o ensino da matemática, sendo o Curso de Matemática para o ensino secundário obra que alcançou 32 edições.

Thales de Faria Mello Carvalho (1915-1961), egresso da Escola de Engenharia, tornou-se professor de matemática do ensino secundário e superior, além de ter escrito diversos livros de matemática e de recreação. Sua obra para o ensino secundário procurou atender à legislação em vigor. Em 1943, introduziu o CDI no terceiro volume do seu livro Matemática, o qual foi adotado em muitas escolas brasileiras (Silva e Brum, 2022).

Algacyr Munhoz Maeder (1903-1975) escreveu 28 livros de matemática (Longen, 2007). O que foi por nós escolhido como objeto de análise, o livro destinado ao 3º ano do curso colegial, apresenta semelhanças com o livro de Thales, pois também inicia com uma ideia intuitiva de limite de sucessão.

A carreira profissional de Ary Quintella (1906-1968) lhe permitiu fazer parte do quadro de membros da Companhia Editora Nacional, e os livros didáticos de matemática de sua autoria foram transformados em best-sellers educacionais (Dellabetta; Ribeiro; Toillier, 2017, p. 3).

António Augusto Lopes (1917-2015) nasceu em Guarda, Portugal. Concluiu a licenciatura em Ciências Matemáticas em 1938, na Universidade de Coimbra. Foi professor de Matemática no ensino liceal (secundário), autor de vários livros para o ensino da Matemática e participante privilegiado na reforma da Matemática Moderna, em Portugal, além de professor na Telescola (Almeida,

2013).

José Sebastião e Silva (1914-1972) doutorou-se em matemática, em 1949, na Faculdade de Ciências de Lisboa. Por suas investigações em Análise Funcional, abriu linhas de pesquisas que continuam a ser exploradas em muitos países. É o matemático mais reconhecido em Portugal no século XX. Por mais de 20 anos foi diretor do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa. Suas contribuições foram na teoria dos espaços localmente convexos e teoria da distribuição (Ferreira et al., 1999). Como educador matemático desempenhou papel fundamental na atualização do ensino da matemática (Silva, 2024).

José Duarte da Silva Paulo (1905-1976) foi professor de Matemática do ensino liceal e foi coautor de livros didáticos para essa disciplina. Em 1940, colaborou na criação da revista Gazeta de Matemática, da qual foi um dos editores e o responsável pela seção 'Matemáticas Elementares'. Participou ativamente na Reforma da Matemática Moderna, em Portugal, sendo, em 1964, encarregado da regência de turmas de experiência para atualização do ensino da Matemática (Silva, 2024).

A maioria dos autores cujos livros foram analisados podem ser considerados especialistas em educação matemática e lideranças na comunidade de matemática de seus respectivos países. Os livros didáticos que escreveram destinados à matemática escolar foram responsáveis pela formação de gerações de brasileiros e portugueses.

Abordagem do conceito de derivada nos livros brasileiros

A maioria dos autores brasileiros não incluiu o CDI na álgebra, apresentando-o como um tópico específico da matemática, que é como aparece no último volume do livro dedicado ao curso científico, embora no programa oficial o cálculo tenha sido inserido na rubrica álgebra. O Quadro 3 apresenta a ordenação dos conteúdos apresentados por cada autor.

Quadro 3 – As derivadas em cada coleção

Autor	Derivada
Roxo et al. (1955)	Derivada em um ponto; derivada infinita; interpretação geométrica e cinemática da derivada; diferença e diferencial; funções derivadas; derivação sucessiva; regras de derivação; diferenciais sucessivas;

	aplicação da derivada ao estudo da variação de uma função; máximos e mínimos relativos e interpretação geométrica
Carvalho (1955)	Definição de derivada; exemplo com tabela; função derivada; interpretação geométrica e cinemática da derivada; derivadas unilaterais; continuidade e derivabilidade; regras de derivação; máximos e mínimos.
Maeder (1955)	Derivada num ponto; derivada infinita; interpretação geométrica e cinemática da derivada; diferencial e sua interpretação geométrica; regras de derivação; aplicação das derivadas: máximos e mínimos, estudo das variações das funções.
Bezerra (1967?)	Derivada num ponto; função derivada; interpretação geométrica e cinemática da derivada; diferencial e sua interpretação geométrica; regras de derivação; derivações sucessivas; aplicações: funções crescentes e decrescentes, máximos e mínimos.
Quintella (1965)	Acréscimos; derivada em um ponto; função derivada; regra geral de derivação; interpretação geométrica e cinemática da derivada; regras de derivação; derivadas sucessivas; diferencial e sua interpretação geométrica; variação das funções e máximos e mínimos.

Fonte: elaborado pelos autores.

Globalmente, os autores atenderam às recomendações do programa oficial da Reforma de 1942. A abordagem de Carvalho (1955, p. 125) começa, também, formalmente, com a definição de derivada num ponto.

Seja $y = f(x)$ (1) uma função unívoca e contínua num intervalo $[a, b]$ de seu campo de existência. Sejam x_0 e $x_0 + \Delta x_0$ dois pontos de $[a, b]$ não infinitamente próximos e $f(x_0)$ e $f(x_0 + \Delta x_0)$ os valores correspondentes da função (1) nesses pontos. Representemos por Δy_0 a diferença $\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$, isto é o acréscimo da função (1) quando x passa de x_0 para $x_0 + \Delta x_0$. Formemos, então, o quociente entre o acréscimo da função e o acréscimo correspondente da variável $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$ (2). Este quociente denomina-se razão incremental da função. Se supusermos x_0 constante e fizermos Δx_0 tender para zero, em virtude da continuidade da função (1), Δy_0 também tenderá para zero. Pode acontecer que, quando Δx_0 tenda para zero, a razão incremental (2) tenha um limite finito que representaremos por $\frac{dy_0}{dx_0}$ ou por $f'(x_0)$, isto é, $\lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{dy_0}{dx_0} = f'(x_0)$ (3). Diz-se, então, que a função (1) é derivável nesse ponto, chamando-se derivada a esse limite.

O autor fez algumas exigências desnecessárias para definir função, como, por exemplo ser unívoca (atualmente, entende-se função sempre como unívoca). A exigência de continuidade é um pleonismo; não era necessário exigir que o domínio fosse um intervalo, mas apenas que x_0 fosse um ponto de acumulação. A definição longa pode ter sido assustadora para o estudante,

embora o autor pareça ter tido a intenção de didatizá-la, acompanhando-a com longo texto explicativo.

Para facilitar a compreensão, sugeriu um exemplo, que ele assim justificou: “A fim de dar ao principiante uma ideia bem clara da noção de derivada, apresentamos o seguinte exemplo bastante elucidativo” (Carvalho, 1955, p. 124). O exemplo é a função quadrática , contínua para todos os seus pontos de existência. Para ele atribui pequenos acréscimos e analisa o que acontece quando se atribui esse incremento a x e a y . Essa situação foi didaticamente exemplificada pelo autor numa tabela (Imagem 1).

Imagem 1 – Título da Imagem

x_0	y_0	Δx_0	$x_0 + \Delta x_0$	$y_0 + \Delta y_0$	Δy_0	$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$
4	16	0,1	4,1	16,81	0,81	8,1
		0,01	4,01	16,0801	0,0801	8,01
		0,001	4,001	16,008001	0,008001	8,001
		↓			↓	↓
		0			0	8

Fonte: Carvalho, 1955, p. 124.

Carvalho (1955) concluiu dizendo que, mesmo que os acréscimos tendam para zero, simultaneamente, a razão incremental tende para 8, que é derivada no ponto . Nota-se que, ao experimentar diferentes valores para , o esperado é que os acréscimos dados se comportem previsivelmente. Conforme sugerido por Tall (2013), esse é um tipo de pensamento do mundo corpóreo. Se ele tivesse começado com o exemplo intuitivo, sua abordagem poderia ser classificada como intuitiva.

A formulação do autor Bezerra (196?, p. 201) é significativa, pois traz uma abordagem totalmente formalizada, conforme Tall (2013), embora siga a sequência que quase todos os autores usaram, começando com a definição da derivada em um ponto.

Seja uma função $y = f(x)$ definida num intervalo (a, b) e x_0 um ponto de (a, b) , Δx_0 é acréscimo da variável quando a variável

sofre um acréscimo Δx_0 , a função sofre um acréscimo $\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$. A relação $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$ chama-se razão dos acréscimos ou razão incremental. Chama-se derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_0 ao limite finito, caso exista, da razão incremental quando $\Delta x_0 \rightarrow 0$, $\lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = f'(x_0)$

A partir disso, o autor chega à definição de função derivada: uma função de x , definida em (a, b) , tal que, para cada x , o valor coincide com o valor da derivada de $f(x)$ nesse ponto. Essa função é simbolizada por $f'(x)$, y' ou $\frac{dy}{dx}$.

Há variações entre as formulações dos autores: por exemplo, Quintella (1955) e Carvalho (1955), por exemplo, exigem que a função, além de ser definida no intervalo, seja contínua, para que exista a derivada num ponto. Há semelhanças na sequência seguida pelos autores: acréscimo, razão incremental, derivada em um ponto, função derivada.

Maeder (1955) inicia com a definição de derivada em um ponto, não apresentando uma introdução intuitiva. De maneira semelhante, Roxo et al (1955) parte da definição da derivada em um ponto, entendida como o limite da razão incremental. Nesta parte introdutória, em notas de rodapé, os autores trazem algumas informações da História da Matemática, procurando contextualizar um pouco a criação do CDI.

De maneira geral, os autores⁵ analisados começaram a apresentação do conceito de derivada pelas definições, seguidas de exemplos, interpretações geométrica e cinemática (conforme o programa oficial). Pode-se concluir que todos os autores abordaram o conceito de derivada partindo de definições formalizadas, ou seja, no terceiro mundo de Tall (2013).

Abordagem do conceito de derivada nos livros portugueses

Em 1947, Fernando Andrade Pires Lima foi o responsável por uma reforma nos liceus (Almeida; Matos, 2014). Em decorrência desta, o cálculo infinitesimal (CI) foi reintroduzido na disciplina de álgebra e os programas de matemática de 1948, conforme o decreto 37.112, detalhavam o que deveria ser

⁵ Os autores brasileiros selecionados foram aqueles mais recomendados à época para o ensino conforme mostram as pesquisas de Oliveira Filho (2013); Ribeiro (2011); Otone (2011)

ensinado. No início da década de 1950, os livros únicos deveriam ser usados em todos os liceus. A escolha de tal livro, realizada mediante concurso, era atribuição de um comitê de matemáticos. Assim, o primeiro livro de Álgebra para o 3º ciclo liceal, selecionado em 1950, para um período de quatro anos, foi o Compêndio de Álgebra para o 3º ciclo de António Augusto Lopes. Em 1955, a aprovação foi para o livro de José Sebastião e Silva em parceria com José da Silva Paulo. Apresentamos no Quadro 4 a ordenação de conteúdos nos livros didáticos desses autores, com indícios da abordagem por eles seguida.

Quadro 4 – ordenação de conteúdos pelos autores

António Augusto Lopes (1950)	José Sebastião e Silva; José da Silva Paulo (1956)
O Problema das tangentes a uma curva; problema das velocidades; problema da pressão atmosférica; razão incremental; derivada num ponto; função derivada; interpretação geométrica; função derivada; derivada das funções algébricas; História da Matemática: Leibniz.	Exemplo intuitivo; declive de uma reta; declive de uma curva num ponto; razão incremental; significado geométrico da derivada; derivabilidade e continuidade; função derivada; interpretação cinemática; regras de derivação; aplicações das derivadas; história das derivadas.

Fonte: Elaborado pelos autores

António Augusto Lopes abordou o conceito de derivada começando com exemplos. O primeiro refere-se ao problema da tangente a uma curva. Acompanha uma representação geométrica em que ele toma uma curva C , com uma reta secante e uma tangente num ponto M da curva. Conclui dizendo que quando a secante varia, também varia o ângulo W e, portanto, a razão $\frac{k}{h}$, que é a tangente de w . “Esta relação serve, pois, para estudar a rapidez com que a secante tende para a tangente, quando o acréscimo h tende para zero [...]” (Lopes, 1950, p. 318).

O exemplo interessante diz respeito à pressão atmosférica. A variação da pressão atmosférica em função do tempo e velocidade de um ponto móvel. “A pressão atmosférica não é constante; varia de instante para instante [...]. Designando por Δp um acréscimo (positivo ou negativo) de pressão e por Δt o acréscimo correspondente de tempo, o quociente $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ define a variação média da pressão atmosférica” (Lopes, 1950, p. 319).

Após essas exemplificações, o autor afirma que os problemas anteriormente apresentados conduzem ao cálculo do limite de dois acréscimos. Ele traz um exemplo numérico - função $y = x^2$ - para explicar como os acréscimos e a razão incremental funcionam numericamente. Para isso, ele utiliza uma tabela ilustrativa para chegar à conclusão de que o limite da função no ponto x_0 é $2x_0$ (Tabela 1).

Tabela 1 – Tabela de incrementos e razão incremental

x_0	$x_0 + h$	h	y_0	$y_0 + k$	k	$\frac{k}{h}$
1	2	1	1	4	3	3
1	1,8	0,8	1	3,24	2,24	2,8
1	1,4	0,4	1	1,96	1,96	2,4
1	1,2	0,2	1	1,44	1,44	2,2
1	1,1	0,1	1	1,21	1,21	2,1
1	1,01	0,01	1	1,0201	1,0201	2,01
1	1,001	0,001	1	1,002001	0,002001	2,001

Fonte: Lopes, 1950, p. 321

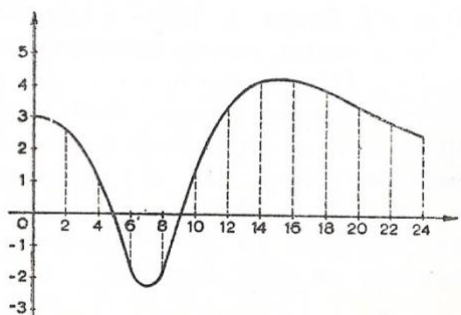
, Após essa preparação, ele introduziu a definição de derivada de uma função. A derivada da função $f(x)$ para $x = x_0$, é o limite da razão $\frac{k}{h}$, entre o acréscimo da função e o correspondente acréscimo da variável, quando este último tende para zero, de qualquer modo (Lopes, 1950, p. 322). Complementa dizendo que $\frac{k}{h}$ é chamada razão incremental; o seu limite, quando h tende para zero, é a derivada de $f(x)$ para $x = a$, representa-se por $f'(a)$. Simbolicamente, o autor escreveu: “ $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ” (Lopes, 1950, p. 323).

Analisando a abordagem de Lopes (1950) para o conceito de derivada à luz da teoria de Tall (2013), conclui-se que ele parte de uma perspectiva intuitiva (do mundo corporificado) para chegar àquela formalizada, exigida pela matemática acadêmica.

Por sua vez, a primeira edição do Compêndio de Álgebra de Silva e Paulo ocorreu em 1956. A introdução da derivada é realizada num extenso texto. Eles comentam que a variação de um gráfico é o que primeiro desperta nossa atenção. Por essa razão, os autores trazem uma exemplificação da variação de temperatura num intervalo de tempo. Um gráfico acompanha o texto (Imagem

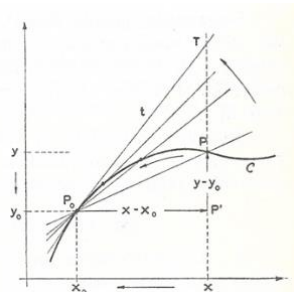
2). Ainda sem apresentar a definição de derivada, os autores trazem um segundo exemplo, que é geométrico. Trata-se da tangente a uma curva (Imagem 3).

Imagem 2 - Variação de temperatura em função do tempo



Fonte: Silva; Paulo (1957, p. 168).

Imagem 3 - Tangente à uma curva



Fonte: Silva; Paulo (1957, p. 171).

O declive da reta tangente PP_0 será $d = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, para $x \neq x_0$. Se $x \rightarrow x_0$, a variável d , função de x , tenderá a um limite finito.

$$\text{Logo, } d_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Os autores concluem que a reta t , que passa pelo ponto P_0 e tem declive d_0 , é chamada de tangente à curva nesse ponto: “Quando o ponto móvel P tende para o ponto fixo P_0 , a secante P_0P tende para uma posição limite, t , que é a tangente à curva no ponto P_0 . O declive da curva no ponto P_0 é o declive da tangente à curva nesse ponto” (Silva; Paulo, 1957, p. 171).

O texto introdutório do conceito de derivada é longo, os autores têm consciência de estarem realizando um preâmbulo absolutamente necessário antes de apresentar o conceito definição de derivada (Domingos, 2003). Essa definição é concisa: uma vez que a preparação intuitiva foi realizada, é preciso entrar no mundo simbólico e formal para sintetizar o conceito.

“Definição: Chama-se derivada da função $f(x)$ em x_0 , e representa-se por $f'(x_0)$, o limite da razão incremental de $f(x)$ entre x_0 e x , quando x tende para x_0 (se esse limite existir). Em fórmula: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h}$ “ (Silva; Paulo, 1957, p. 173). Os autores chamam a atenção para o fato de que talvez o $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h}$, não exista. Nesse caso, $f(x)$ não tem derivada no ponto x_0 . Na sequência,

mostram exemplos numéricos de como calcular a derivada num ponto. O primeiro exemplo é o da função quadrática $f(x) = x^2$.

O livro de Silva e Paulo (1957) pode ser considerado como um exemplo de uma abordagem corporificada mesclada com formalizada, conforme a teoria de Tall (2013).

Conclusão

A análise dos livros didáticos brasileiros e portugueses revelou importantes aproximações na forma de introdução do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) no ensino secundário. Em primeiro lugar, observou-se uma estreita correspondência entre os conteúdos apresentados nos manuais e aqueles prescritos pelos programas oficiais de ensino. Em segundo lugar, verificou-se uma organização semelhante dos conteúdos, estruturada a partir da sequência conceitual função, limite, continuidade e derivada, evidenciando uma lógica comum de apresentação dos fundamentos da análise matemática.

Apesar dessas convergências, a comparação entre as obras dos dois países evidencia diferenças significativas quanto às abordagens adotadas para a introdução do conceito de derivada. Nos livros brasileiros, predominou uma perspectiva mais formalizada, centrada na apresentação da definição matemática do conceito, seguida de exemplos numéricos e aplicações. Embora todos os autores tenham explorado as interpretações geométricas e mecânica da derivada, apenas alguns recorreram a recursos mais intuitivos, tais como gráficos, tabelas de valores aproximados e situações contextualizadas, características de uma abordagem corporificada. Em contraste, os autores portugueses atribuíram maior relevância a esses elementos introdutórios, utilizando representações visuais e exemplos intuitivos como estratégia para construir o significado do conceito antes da formalização teórica.

À luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por Tall (2013), é possível afirmar que os autores brasileiros privilegiaram uma abordagem predominantemente simbólico-formal, enquanto os autores portugueses adotaram uma perspectiva corporificado-formal. Essa opção metodológica aproxima-se das concepções defendidas por Felix Klein, para quem a introdução de conceitos avançados deveria partir de experiências intuitivas e

representações concretas, conduzindo gradualmente à formalização matemática (Klein, 1945).

Outro aspecto relevante diz respeito ao perfil dos autores analisados. Tanto no Brasil quanto em Portugal, os livros didáticos foram produzidos por matemáticos que, em sua maioria, atuavam no ensino superior e ocupavam posições de destaque nos sistemas educacionais. A experiência acadêmica e a participação em instâncias decisórias ligadas à formulação de políticas educacionais conferiram a esses autores significativa influência na definição dos programas oficiais de Matemática. Não por acaso, as obras examinadas alcançaram numerosas edições e desempenharam papel central na construção de uma versão escolarizada do conceito de derivada destinada ao ensino secundário.

Por fim, a principal diferença identificada entre os dois contextos refere-se à trajetória curricular do CDI. No Brasil, esse conteúdo começou a ser gradualmente retirado dos programas oficiais a partir da década de 1970, em um processo que culminou praticamente com sua exclusão do currículo da educação básica (raras escolas técnicas ou particulares oferecem ainda este conteúdo). Em Portugal, ao contrário, o ensino de CDI consolidou-se ao longo do século XX e permaneceu integrado ao currículo do ensino secundário, estendendo-se até o século XXI. Essa divergência evidencia distintas concepções sobre o papel da Matemática avançada na formação escolar e contribui para compreender os diferentes caminhos percorridos pela educação matemática nos dois países.

Referências

ALBUQUERQUE, Joaquim. **Álgebra VI e VII**. Classe dos Lyceus. Porto: Typographia Occidental, 1906.

ALBUQUERQUE, Joaquim. **Álgebra VI e VII**. Classes para o curso complementar de ciências. Porto: Imprensa Nacional de Jaime Vasconcelos, 1924.

ALMEIDA, Maria Cristina. **Um olhar sobre o ensino da Matemática guiado por António Augusto Lopes**. 2013. 419 p. Tese (Doutorado). Universidade Nova de Lisboa, Almada, 2013.

ALMEIDA, Maria Cristina. Reconpondo o ensino da análise infinitesimal nos liceus (1948-1953). **Revista REAMEC**, [s. l.], v. 8, n. 3, p. 1-18, 2021.

ANDREA, Eduardo. **Compendio de Álgebra** – curso complementar. Lisboa: Imprensa Nacional, 1909.

ANDREA, Eduardo. **Compendio de Álgebra** – curso complementar. Lisboa: Imprensa Nacional, 1924.

ARTIGUE, Michèle. Enseignement et apprentissage de l'analyse: que retenir du passé pour penser le futur? *In: One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique*. Monograph n. 39, Proceedings of the EM-ICMI Symposium (Geneva, 20-22 October 2000), [S.l.]: [s.n.], 2003, p. 211-223.

BEKE, Emanuel. Les résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures des établissements secondaires. **L'Enseignement Mathématique**, [s.l.], n. 16, p. 245–284, 1914.

BENITO, Agostin Escalano. **A escola como cultura**: experiência, memória e arqueologia. Campinas (SP): Alínea, 2017.

BEZERRA, Jairo. **Curso de Matemática**. 10. ed. São Paulo: Editora Nacional, [196?].

BLIJ, Frederic.; HILDING, Sven.; WEINZWEIG, A. I. Reemplazo de viejos objetivos por nuevos: analisis de las reacciones provocadas por reformas recientes em vários países. *In: Morris, Robert. Estudios en educación matemática*. Paris: Unesco, 1981, v.2, p. 135-150.

BRASIL. Ministério da Educação e Saúde. Portaria n. 177 de 16 mar.1943. [S.l.], [s.n.], 1943.

BURKHARDT, Hug. Curriculum Design and systemic change. *In: Li, Yeping; LAPPAN, Glenda (ed.). Mathematics Curriculum in School Education*. [S. l.]: [s. n.], 2014. p. 13-34.

CAPELO, Denise Franco. **Um estudo da contribuição de livros didáticos de Matemática no processo de disciplinarização da matemática escolar do colégio – 1943 a 1961**. 2011. 385 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

CARVALHO, Thales Mello. **Matemática para o terceiro ano colegial**. 5. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1955.

CHOPPIN, Alain. O historiador e o livro escolar. **Revista História da Educação**, [s. l.], v. 6, n. 11, p. 5–24, 2002. Disponível em: ufrgs.br. Acesso em: 18 mar. 2024.

DELLABETTA, Ana Cristina; RIBEIRO, Dulcyiene; TOILLIER, Jean Sebastian. A obra matemática de Ary Quintella e as ideias de volume. *In: ENCONTRO*

PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2017, Cascável. **Anais [...]**. Cascável: [s. n.], 2017. p. 1-12.

DIAS, Marisa da Silva. Transposição didática do conceito de número irracional nas obras portuguesas de 1909 a 1963. **Ensino em Re-Vista**, Uberlândia, v. 29, e018, 2022. Disponível em: fcc.org.br. Acesso em: 25 fev. 2025. DOI: doi.org.

DOMINGOS, António M. D. **Compreensão de conceitos matemáticos Avançados - A matemática no início do Ensino Superior**. 2003. Dissertação (Grau de Doutor em Ciências de Educação) – Universidade Nova Lisboa, Lisboa, 2003.

DOMINGUES, Jonathan. **Os saberes matemáticos sistematizados por Manoel Jairo Bezerra no acessório de ensino Bloco fração, 1950-1970**. 2022. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2022.

CARVALHO, Thales Mello. **Matemática para o terceiro ano colegial**. 5 ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1955.

CHOPPIN, Alain. O historiador e o livro escolar. **Revista História da Educação**, v.6, n.11, p. 5–24. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/asphe/article/view/30596>. Acesso em 18 mar. 2024.

DELLABETTA, Ana. Cristina; RIBEIRO, Dulcyiene; TOILLIER, Jean Sebastian. A obra matemática de Ary Quintella e as ideias de volume. *In*: XIV Encontro Paranaense de Educação Matemática, Anais ... Cascável, 2017, p. 1-12.

DIAS, Marisa da Silva. Transposição didática do conceito de número irracional nas obras portuguesas de 1909 a 1963. **Ensino em Re-Vista**, Uberlândia, v. 29, e018, 2022. Disponível em http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1983-17302022000100404&lng=pt&nrm=iso. Acessos em 25 fev. 2025. Epub 08-Jun-2023. <https://seer.ufu.br/index.php/emrevista/article/view/64674>.

DOMINGOS, António M. D. **Compreensão de conceitos matemáticos Avançados - A matemática no início do Ensino Superior** - Dissertação para grau de doutor em Ciências de Educação, Universidade Nova Lisboa, 2003.

DOMINGUES, Jonathan. **Os saberes matemáticos sistematizados por Manoel Jairo Bezerra no acessório de ensino Bloco fração, 1950-1970**. 2022. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2022.

KLEIN, Felix. **Elementary Mathematics from an advanced Standpoint**. New York: Dover, 1945.

LONGEN, Alisson. **Livros didáticos de Algacyr Munhoz Maeder sob um olhar da educação matemática**. 2007. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

LOPES, Antonio Augusto. **Compêndio de Álgebra**: 6º ano dos liceus. Porto: Porto Editora, 1955.

MAEDER, Algacyr Munhoz. **Curso de Matemática** – 3º livro – ciclo colegial. 5. ed. São Paulo: Edições Melhoramentos, 1955.

OLIVEIRA FILHO, Francisco. **A Matemática do Colégio**: livros didáticos e história de uma disciplina escolar. 2013. 562 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera, São Paulo, 2013.

OTONE, Maryneusa Cordeiro. **História da constituição da matemática do colégio no cotidiano escolar**. 2011. 290 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

PINTO, Helder. **A matemática na Academia Politécnica do Porto**. 2012. 524 p. Tese (Doutorado em História e Filosofia das Ciências) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012.

PORTUGAL. **Decreto nº 37.112, de 22 de outubro de 1948**. Diário do Governo, Lisboa, 22 out. 1948.

QUINTELLA, Ary. **Matemática para o terceiro ano colegial**. 12. ed. São Paulo: Editora Nacional, 1965.

RODRIGUES, José Manuel. **Álgebra Elementar**. Porto: Livraria Chardron, 1909.

ROTA, Alesson. Estado(s) novo(s): um estudo de educação comparada entre Brasil e Portugal (1936-1945). **Revista Latino-Americana de História**, [s. l.], v. 2, n. 6, p. 1002-1013, 2013.

ROXO, Euclides *et al.* **Matemática 2º Ciclo – 3ª série**. 4. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1955.

SILVA, José Sebastião. A Análise Infinitesimal no Ensino Secundário. **Gazeta de Matemática**, [s. l.], n. 49, p. 1-4, 1951.

SILVA, José Sebastião; PAULO, José da Silva. **Compêndio de álgebra**: 3º ciclo dos liceus, v.1, 6º ano. 2. ed. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco, 1957.

SILVA, Circe Mary Silva; BRUM, Ana Paula. Contribuições de Thales de Faria Mello Carvalho para a Educação Matemática no século XX. **VIDYA**, Santa Maria, v. 42, n. 2, p. 217-231, 2022.

SILVA, Circe Mary Silva. O conceito de derivada no livro texto de Álgebra de José Sebastião e Silva e José da Silva Paulo. **Revista Quadrante**, Lisboa, v. 33, n. 1, p. 97-111, 2024.

SILVA, Circe Mary Silva. O cálculo diferencial e integral no currículo do secundário no contexto internacional do século XX. *In*: RODRIGUES, Alexandra Sofia (org.). **Currículo de Matemática no Ensino secundário: entre o passado e presente**. São Paulo: L.F. Editorial, 2026. p. 39-62.

TALL, David. **How Humans Learn to Think Mathematically**: Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

VIDAL, Diana. No interior da sala de aula: ensaio sobre cultura e prática escolar. **Currículo sem fronteiras**, [s. l.], v. 9, n. 1, p. 25-41, jan./jun. 2019.

ZUCCHERI, Luciana; ZUDINI, Verena. History of teaching Calculus. *In*: KARP, Alexander; SCHUBRING, Gert (ed.). **Handbook on the History of Mathematics Education**. New York: Springer, 2014. p. 493-513.

Editor(a) responsável: Fernando Ripe

Recebido em: 28/08/25

Aceito em: 13/04/26

Circe Mary Silva da Silva

Licenciada em Matemática pela PUCRS, mestre em Matemática pela UFF, doutora em Pedagogia pela Universidade de Bielefeld, Alemanha, pós-doutorada na Universidade Nova de Lisboa (Portugal). Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Pelotas.

✉ cmdynnikov@gmail.com.br

🔗 <http://lattes.cnpq.br/78107116865172848>

🆔 <http://orcid.org/0000-0002-4828-8029>

António Domingos

Licenciado em Matemática, mestre em Ciências da Educação e doutor na mesma área, com a especialidade de Teoria e Desenvolvimento Curricular. Professor no departamento de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Nova de Lisboa.

✉ amdd@fct.unl.pt

🔗 <http://lattes.cnpq.br/4008578949931483>

🆔 <https://orcid.org/0000-0002-5362-5691>