

## EMPREGO DA FUNÇÃO FRECHET PARA MODELAGEM DA DISTRIBUIÇÃO DIAMÉTRICA DE POVOAMENTOS DE EUCALIPTO

Daniel Henrique Breda Binoti<sup>1</sup>, Mayra Luiza Marques da Silva Binoti<sup>2</sup>, Helio Garcia Leite<sup>1</sup>

**Resumo:** Objetivou-se nesse trabalho avaliar a eficiência da utilização da função Frechet para a modelagem a estrutura diamétrica de povoamentos de eucalipto. Foram Utilizados dados de parcelas permanentes de inventário, mensuradas nas idades 28, 40, 52, 64, 76 e 84 meses. Ajustou-se para cada parcela e ocasião a função Frechet com 3 e 2 parâmetros com a utilização do parâmetro de locação como diâmetro mínimo do povoamento ( $d = dapmin$ ). Utilizou-se comparativamente a função Weibull. A função foi ajustada pelo método da máxima verossimilhança. A aderência da função aos dados foi verificada pela aplicação do teste Kolmogorov-Smirnov (K-S). A construção do modelo de distribuição diamétrica baseou-se na correlação dos parâmetros da fdp com características do povoamento. Todos os ajustes apresentaram aderência aos dados pelo teste K-S. As equações que compõem os modelos de distribuição diamétrica de 2P e  $d = dapmin$ , não apresentaram tendenciosidade em suas estimativas, podendo ser usadas para a descrição da distribuição diamétrica de povoamentos equiâneos.

**Palavras-chave:** Frechet; distribuição de diâmetros, eucalipto.

## THE USE OF FRECHET FUNCTION IN THE MODELLING OF THE DIAMETER DISTRIBUTION OF A EUCALYPT

**Abstract:** The objective of this study was to evaluate the efficiency of use of the Frechet function for modeling the diameter structure of eucalypt. We used data from permanent plot inventory, measured at ages 28, 40, 52, 64, 76 and 84 months. Set for every occasion and share with the function Frechet 3 and 2 parameters and using the location parameter of the stand as the minimum diameter ( $d = dapmin$ ). The function was fitted by maximum likelihood method. The adhesion function to the data was verified by applying the Kolmogorov-Smirnov (K-S). The construction of the diametric distribution model based on the correlation of the *pdf*

---

<sup>1</sup> Departamento de Engenharia Florestal, universidade Federal de Viçosa ó UFV, <danielhbbinoti@gmail.com>, <hglete@gmail.com>.

<sup>2</sup> Departamento de Engenharia Florestal, Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri ó UFJVM, <MayraBinoti@gmail.com>.

parameters stand characteristics. All adjustments to the data presented adherence by K-S test. The equations that comprise the model of the diameter distribution of 2P and  $= dapmin$  showed no bias in their estimates, and may be used to describe the diameter distribution of even-aged stands.

**Keywords:** Frechet, diameter distribution, eucalypt.

## 1 INTRODUÇÃO

O manejo de florestas submetidas a desbastes, onde a madeira é destinada a multiprodutos, e requer o emprego de modelos de distribuição de diâmetros, ou de árvores individuais. Esses modelos permitem estimar o número de árvores, área basal ou volume por classe de diâmetro, possibilitando maior flexibilidade na simulação de desbastes e quantificação de multiprodutos quando comparados aos modelos em nível de povoamento. O uso desses tipos de modelos, em conjunto com modelos de *taper*, resulta na possibilidade de quantificação de multiprodutos da madeira (CAMPOS, LEITE, 2009).

A descrição da distribuição diamétrica de povoamentos florestais é feita com o emprego de funções densidade de probabilidade (*fdp*), ocorrendo o predomínio da função Weibull (BAILEY, DELL, 1973; CAO, 2004; NOGUEIRA et al., 2005; CAMPOS, LEITE, 2009, BINOTI et al., 2010). Contudo, é importante conduzir estudos sobre a introdução de novas funções conforme Leite et al. (2010).

Binoti (2008) utilizou a função Frechet para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos equiâneos de *Tectona grandis* submetidos a desbastes (BINOTI, 2008). Contudo, não se testou a capacidade de recuperação dos parâmetros desta função em uma idade futura.

A função densidade de probabilidade Frechet em sua forma completa (3P) pode ser escrita conforme a Equação 1.

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{\beta}{x-\gamma} \right)^{\alpha+1} e^{-\left( \frac{\beta}{x-\gamma} \right)^{\alpha}} \quad (\text{Equação 1})$$

Em que  $\alpha$  = parâmetro de forma ( $> 0$ );  $\beta$  = parâmetro de escala ( $> 0$ );  $\gamma$  = parâmetro de locação.

A supressão do parâmetro de locação resulta na função Frechet de 2P e pode ser expressa conforme a Equação 2.

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{\beta}{x} \right)^{\alpha+1} e^{-\left( \frac{\beta}{x} \right)^{\alpha}} \quad (\text{Equação 2})$$

O parâmetro de locação pode também ser substituído pelo diâmetro mínimo da parcela ( $dapmin$ ), resultando na função Frechet ( $=dapmin$ ) (Equação 3).

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{\beta}{x - dap\ min} \right)^{\alpha+1} e^{-\left( \frac{\beta}{x - dap\ min} \right)^{\alpha}} \quad (\text{Equação 3})$$

As funções acumulativas das funções Frechet 3P, 2P e  $=dapmin$ , podem ser expressas por meio das Equações 4, 5 e 6.

$$F(x) = e^{-\left( \frac{\beta}{x-\gamma} \right)^{\alpha}} \quad (\text{Equação 4})$$

$$F(x) = e^{-\left( \frac{\beta}{x} \right)^{\alpha}} \quad (\text{Equação 5})$$

$$F(x) = e^{-\left( \frac{\beta}{x - dap\ min} \right)^{\alpha}} \quad (\text{Equação 6})$$

Objetivou-se nesse estudo avaliar a eficiência da função Frechet nas três configurações apresentadas para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos de eucalipto, bem como avaliar a capacidade de recuperação dos parâmetros desta função em uma idade futura.

## 2 MATERIAL E MÉTODOS

### 2.1 Dados

Os dados utilizados nesse estudo foram obtidos de 400 parcelas retangulares permanentes de 340 m<sup>2</sup>, instaladas em povoamentos de híbridos de *Eucalyptus grandis* x *Eucalyptus urophylla*, na região Centro Oeste do Estado de Minas Gerais, Brasil. Esses povoamentos foram estabelecidos sob arranjo espacial de 3 x 3 m, com rotação de corte média de 7 anos. Nesta idade, a produtividade média nesses povoamentos varia entre 25 e 50 m<sup>3</sup>.ha<sup>-1</sup>.ano<sup>-1</sup>. As medições

de diâmetros foram efetuadas nas árvores com diâmetro a 1,3 m de altura (*dap*) acima de 5 cm, nas idades médias de 28, 40, 52, 64, 76 e 84 meses.

## 2.2 Ajuste e Avaliação

Os dados de *dap* observados em cada parcela foram agrupados em classe com amplitude de 1,0 cm. Ajustou-se a função Frechet nas formas: Frechet 3P, Frechet 2P, e Frechet =*dap*min. Os ajustes foram feitos em ambiente Excel com auxílio de técnicas de *Visual Basic for Applications* pelo método da máxima verossimilhança. Para avaliar a aderência da função aos dados utilizou-se o teste Kolmogorov-Smirnov (K-S) (GIBBONS, SUBHABRATA, 1992). Realizou-se a análise entre valores estimados e observados para todos os ajustes obtidos com a função Frechet. Para efeito comparativo, utilizou-se a modelagem com a função Weibull com 2 parâmetros, tradicionalmente utilizada no setor florestal.

## 2.3 Modelos de Distribuição Diamétrica

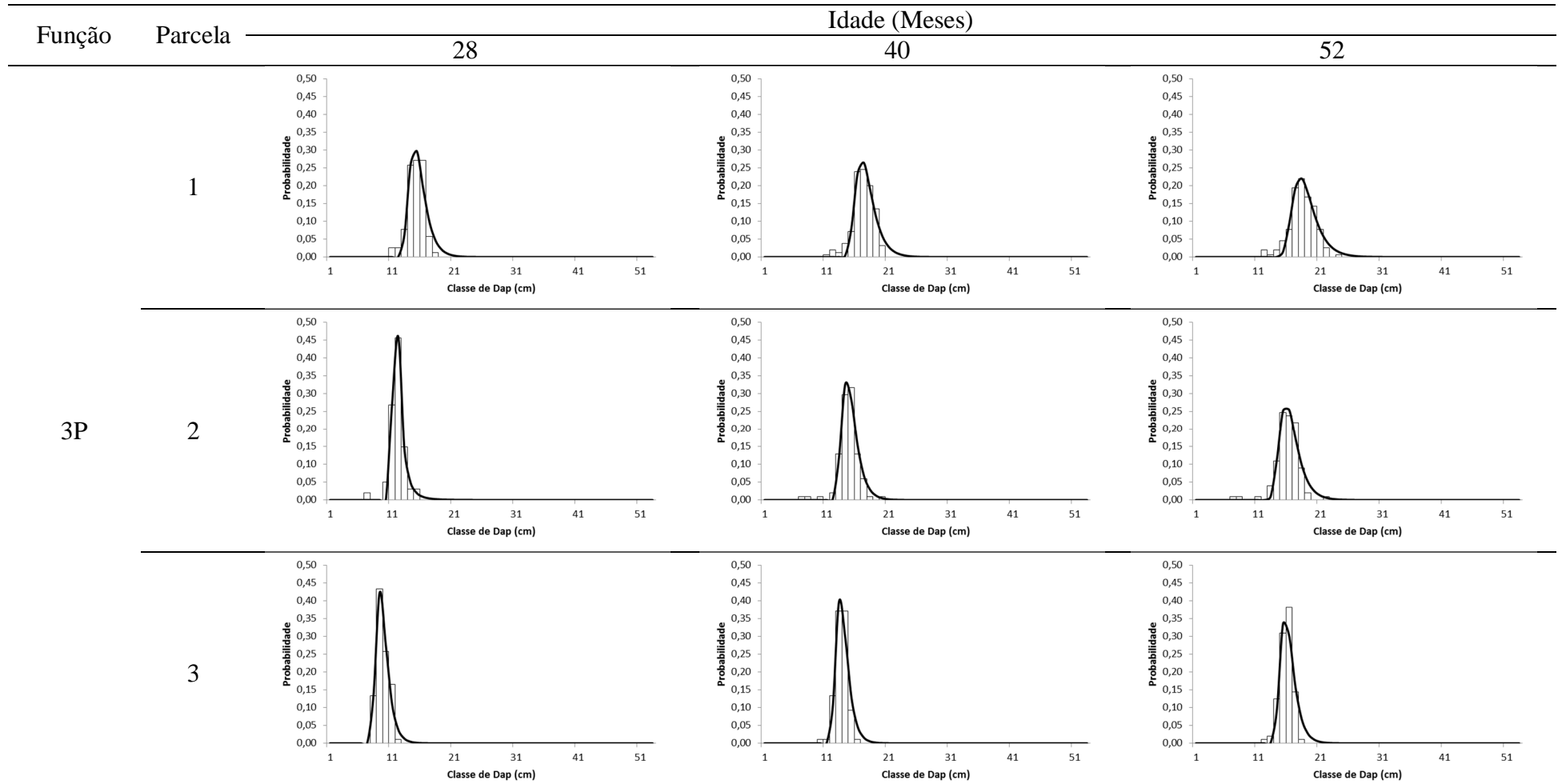
A construção do modelo de distribuição diamétrica baseou-se na alternativa usual de correlação dos parâmetros da *fdp* com características do povoamento. Conforme Nogueira et al. (2005) utilizou-se como variáveis dependentes os parâmetros da função Frechet e Weibull em uma idade futura, e como variáveis independentes os parâmetros da função na idade atual e as características do povoamento em uma idade atual.

A redistribuição teórica dos diâmetros foi avaliada pela capacidade do sistema de equações em projetar o diâmetro máximo, o número total de árvores e os parâmetros da função Frechet ( ,  $e$  ) e Weibull (  $e$  ) para qualquer idade. Construiu-se um modelo para cada configuração testada da função. O coeficiente de correlação entre os valores observados e estimados e a análise gráfica dos resíduos foram utilizados para avaliar a exatidão das estimativas do sistema de equações.

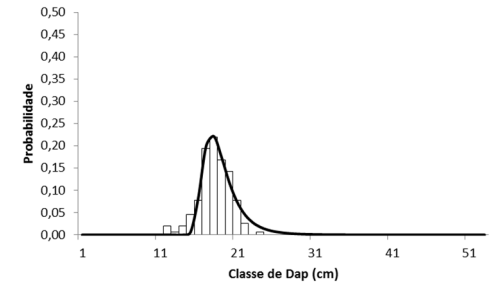
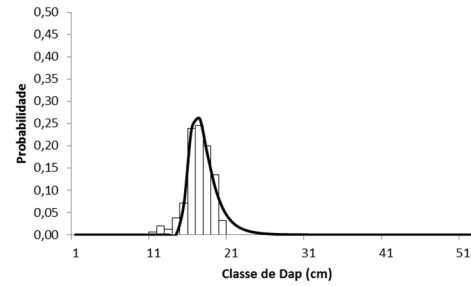
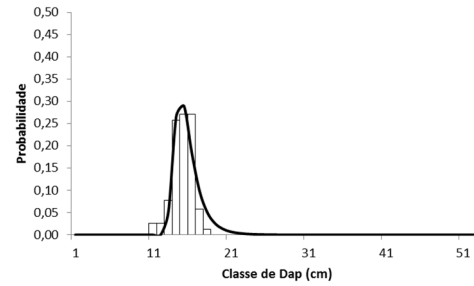
## 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Ajustou-se a função Frechet para todas as parcelas e em cada situação e em cada configuração cada estimação foi comparada com a distribuição observada. Todos os ajustes resultaram em aderência aos dados pelo teste Kolmogorov-Smirnov ( $P > 0,01$ ). Os valores médios da estatística do teste foram de 0,1623, 0,1797, e 0,2003, para a função Frechet com 3P, 2P e =*dap*min, respectivamente. A função Weibull obteve um valor médio de 0,0623. Três parcelas foram escolhidas aleatoriamente e seus ajustes são apresentados na Figura 1. Como

pode ser observado na Figura 1, não houve variação significativa na média dos valores do teste de aderência nas diferentes idades, conforme observado em Binoti (2008).

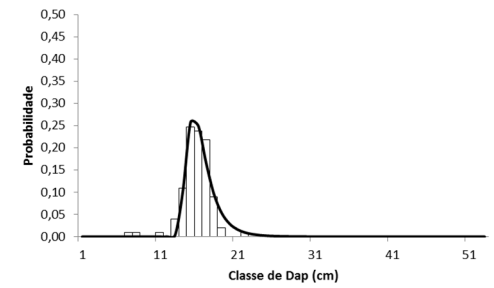
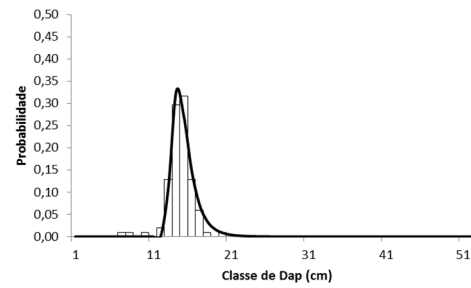
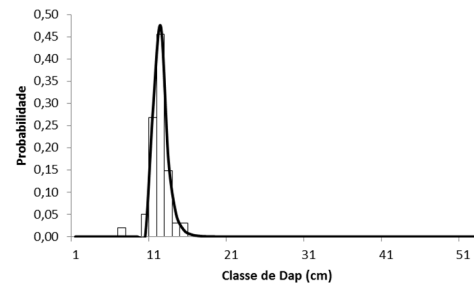


1

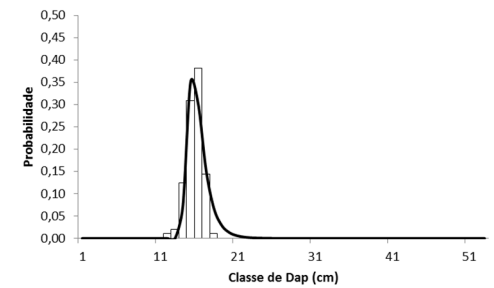
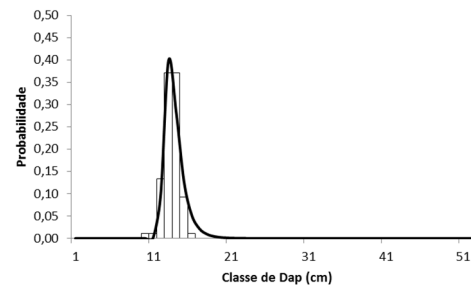
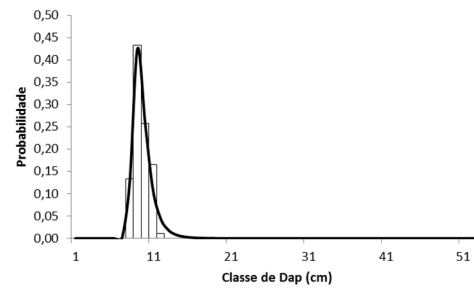


2P

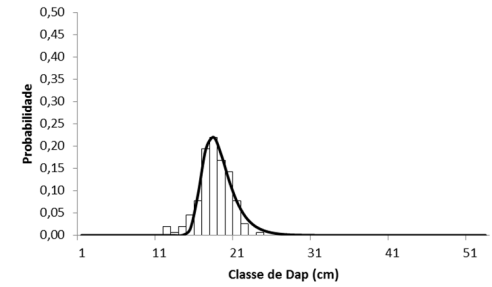
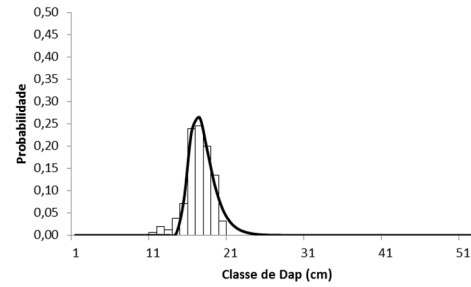
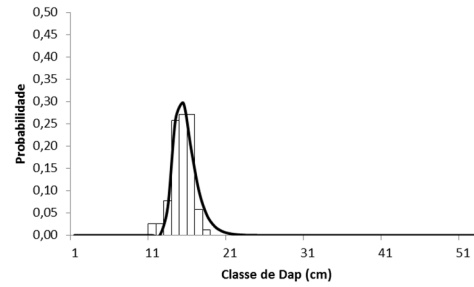
2



3

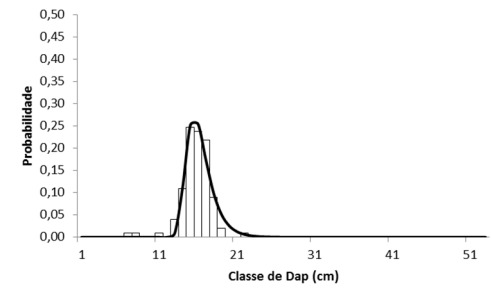
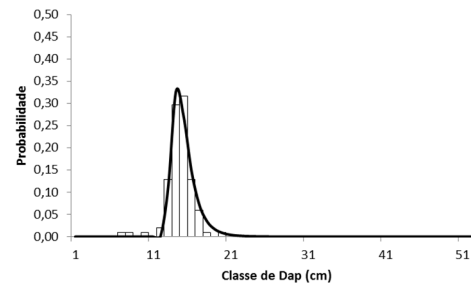
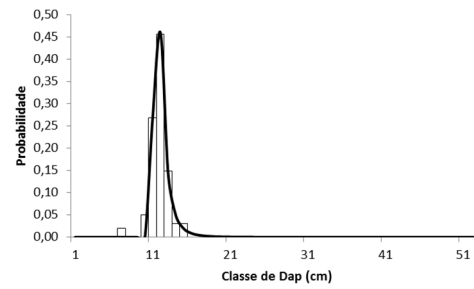


1

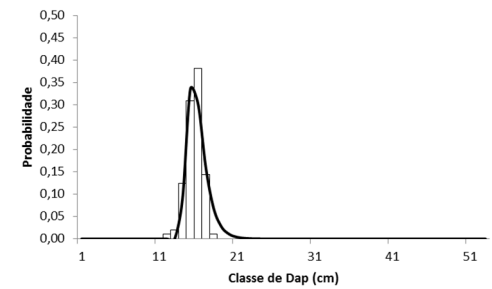
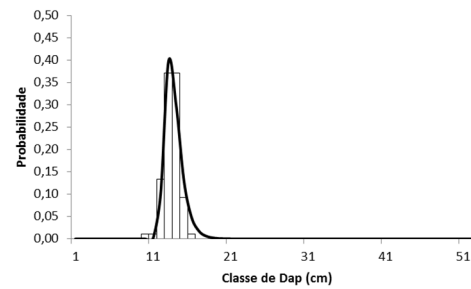
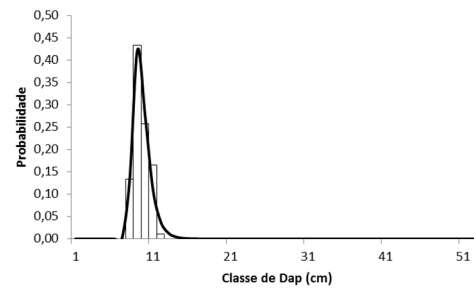


=dapmin

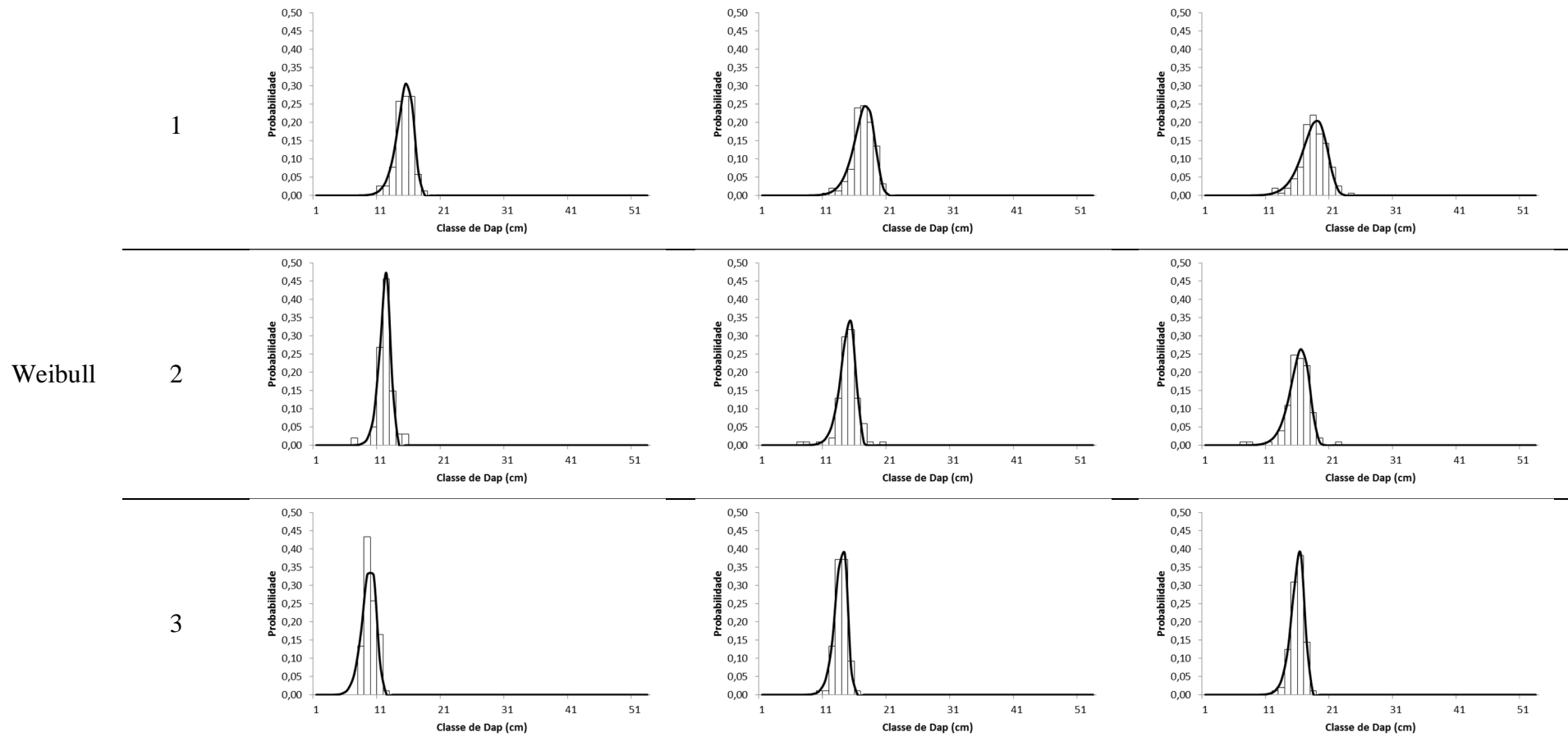
2



3







**Figura 1.** Frequência observada e estimada pela função Frechet para povoamentos equiâneos de eucalipto em diferentes idades.

**Figure 1.** Observed and estimated values by the function Frechet for even-aged stands of eucalyptus at different ages.

Os modelos de distribuição diamétrica ajustados para a função com 3P não apresentaram correlação significativa com nenhum parâmetro do povoamento. Para a função Frechet 2P e =dapmin os modelos de distribuição diamétrica ajustados foram:

### Frechet 2P

$$\alpha_2 = \alpha_1 e^{(-0,2780)(I_2^{0,3519} - I_1^{0,3519})} \quad R_{yy} = 0,9646$$

$$\beta_2 = \beta_1 e^{(-9,5867)(I_2^{-0,8165} - I_1^{-0,8165})} \quad R_{yy} = 0,9409$$

### Frechet =dapmin

$$\alpha_2 = \alpha_1 \left( \frac{I_1}{I_2} \right) + 0,0961 \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) q \quad R_{yy} = 0,9382$$

$$\beta_2 = \beta_1 e^{(-16,2980)(I_2^{-1,0418} - I_1^{-1,0418})} \quad R_{yy} = 0,9617$$

### Weibull

$$\beta_2 = \beta_1 \left( \frac{I_1}{I_2} \right) + 20,7092 \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) \quad R_{yy} = 0,9551$$

$$\ln \gamma_2 = \ln \gamma_1 e^{(-0,7429)(I_2^{0,1318} - I_1^{0,1318})} \quad R_{yy} = 0,9818$$

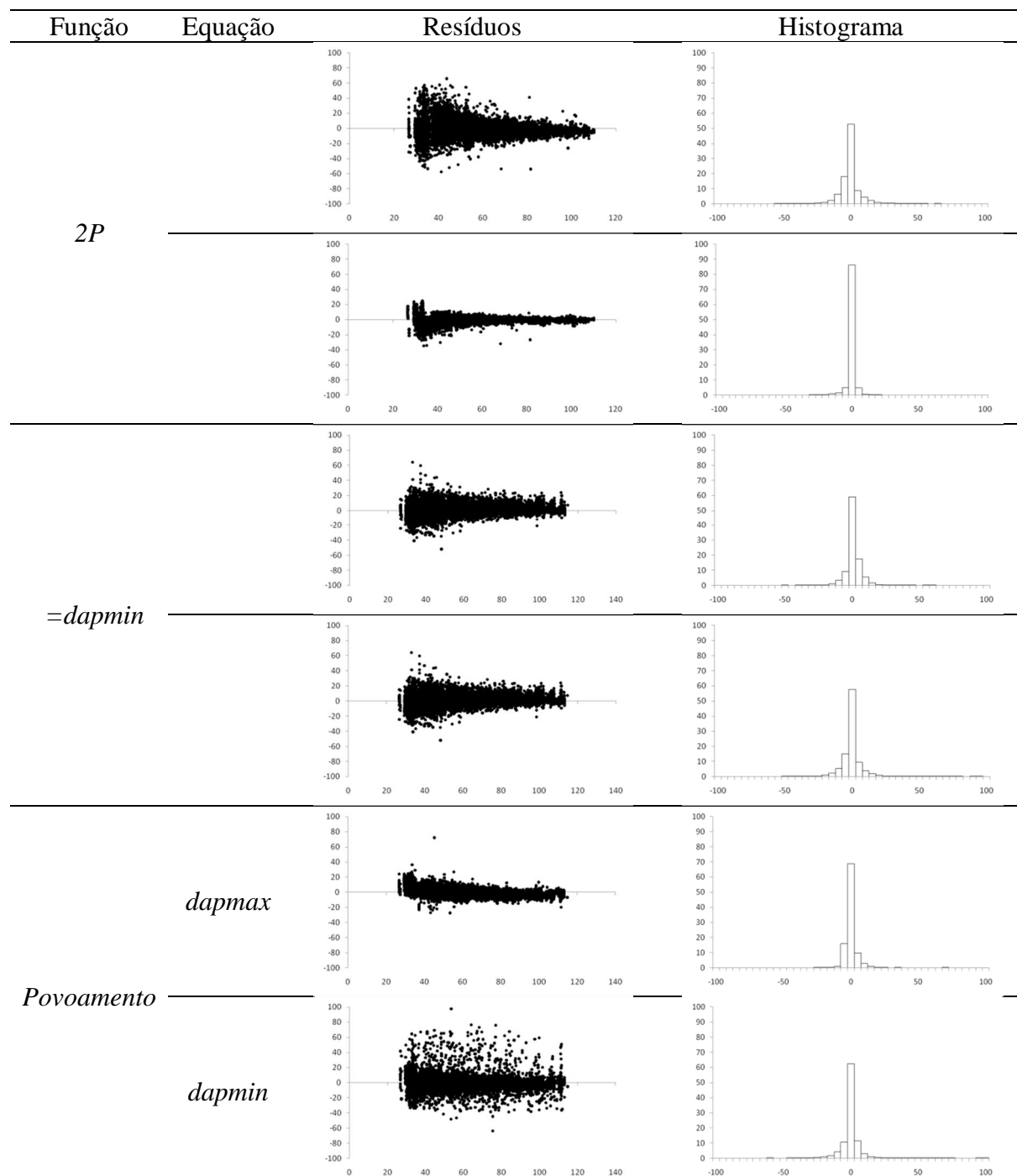
### Características do Povoamento

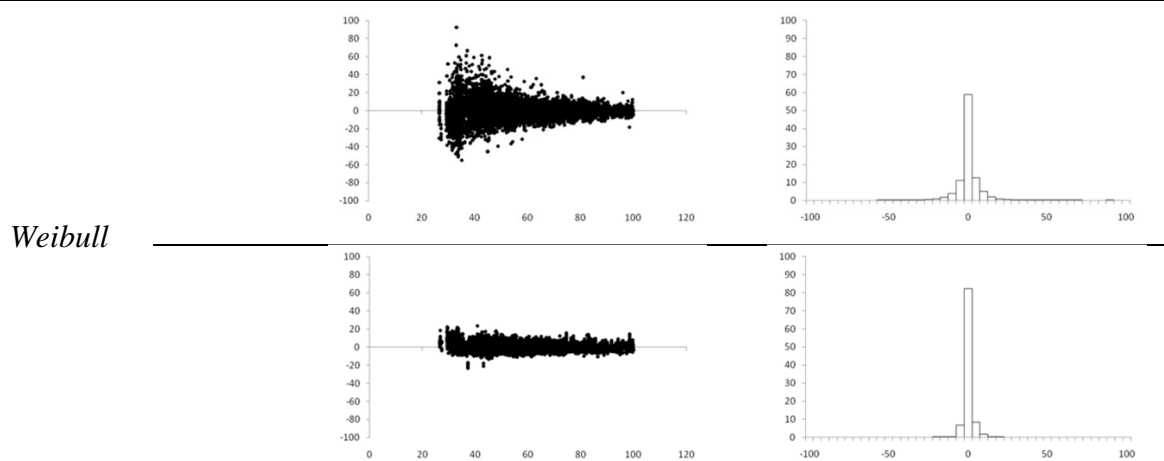
$$d \max_2 = d \max_1 \left( \frac{I_1}{I_2} \right) + 25,3786 \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) \quad R_{yy} = 0,9525$$

$$d \min_2 = d \min_1 e^{(-16,6040)(I_2^{-1,1574} - I_1^{-1,1574})} \quad R_{yy} = 0,8841$$

Em que:  $I_1$  e  $I_2$  = idades atual e futura, respectivamente (meses);  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  = parâmetros de forma da função Frechet nas idades atual e futura;  $\beta_1$  e  $\beta_2$  = parâmetros de escala da função Frechet e Weibull nas idades atual e futura;  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  = parâmetros de locação da função Weibull nas idades atual e futura;  $\delta_1$  e  $\delta_2$  = parâmetros de locação da função Frechet nas idades atual e futura;  $d \max_1$  e  $d \max_2$  = diâmetros máximos nas idades atual e futura (cm);  $d \min_1$  e  $d \min_2$  = diâmetros mínimos nas idades atual e futura (cm);  $q$  = soma quadrática dos  $dap$ ; ln: logaritmo neperiano.

A dispersão gráfica dos resíduos percentuais e os histogramas da dispersão dos erros para cada equação que compõe o sistema são apresentados na Figura 2. A dispersão gráfica dos resíduos apresentou-se sem tendenciosidade para os parâmetros da função Frechet e Weibull. Resultados semelhantes são observados em Nogueira et al. (2005). Não houve necessidade de projeção da densidade do povoamento em função do baixo índice de mortalidade observado.





**Figura 2.** Dispersão e histograma de resíduos em função da idade do povoamento para as equações que compõe o modelo de distribuição de diamétrica proposto para a função Frechet 2P,  $=dapmin$  e Weibull.

**Figure 2.** Scatter and histogram of residues according to the age of the stand for the equations that make up the diametric distribution model proposed for the Frechet 2P,  $=dapmin$  and Weibull.

Dentre as diversas funções utilizadas para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos equiâneos destacam-se: Weibull, normal, log-normal, Gamma, Johnson's SB, Gram-Charlier, Beta, log-logística, Cauchy, Frechet, Erlang, Rayleigh, e Hiperbólica (BAILEY, DELL, 1973; HAFLEY, SCHREUDER, 1977; MALTAMO et al., 1995; MALTAMO et al., 2000; BINOTI 2008; LEITE et al., 2010).

O objetivo deste estudo foi analisar a aplicação da função Frechet nas três configurações (3P, 2P e  $=dapmin$ ) para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos equiâneos de eucalipto, bem como propor um modelo de distribuição diamétrica utilizando a função. Comparou-se a projeção realizada com a modelagem tradicionalmente utilizada no setor florestal.

A utilização da função de 3P resultou em maior flexibilidade para a descrição da distribuição diamétrica do povoamento em estudo, o que é comprovado pelo menor valor da estatística do teste K-S e pela análise visual observada na Figura 1. Contudo, a utilização da função de 3P é inviabilizada pela inexistência de correlação de seus parâmetros com características do povoamento.

As equações que compõem os modelos de distribuição diamétrica de 2P e  $=dapmin$ , não apresentaram tendenciosidade em suas estimativas, podendo ser usadas para a descrição da distribuição diamétrica de povoamentos equiâneos. A eficiência da função Frechet deve ser verificada para a descrição da distribuição diamétrica de povoamentos manejado sobre regime de desbaste. Aconselha-se a avaliação de diferentes formas de ajuste e formas de truncamento

para melhor adequação biológica. A modelagem utilizando a função Weibull apresentou características satisfatórias conforme apresentado em vários trabalhos encontrados na literatura (NOGUEIRA, et al., 2005; CAMPOS e LEITE, 2009).

#### 4 CONCLUSÕES

A função Frechet pode ser utilizada para a descrição da distribuição de diâmetros de povoamentos equiâneos.

A função Weibull apresentou melhor aderência aos dados que as configurações da função Frechet.

#### 5 REFERÊNCIAS

- BAILEY, R. L.; DELL, T. R. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. **Forest Science**, v.19 n.2, p. 97-104, 1973.
- BINOTI, D. H. B. **Funções densidade de probabilidade para a descrição da distribuição diamétrica de povoamentos desbastados de *Tectona grandis***. 2008. 42f. Monografia (Graduação em Engenharia Florestal) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2008.
- BINOTI, D. H. B.; LEITE, H. G.; NOGUEIRA, G. S.; SILVA, M. L. M.; GARCIA, S. L. R.; Cruz, J. P. Uso da função Weibull de três parâmetros em um modelo de distribuição diamétrica para plantios de eucalipto submetidos a desbaste. **Revista Árvore**, v.34, p. 147-156, 2010.
- CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração florestal: Perguntas e respostas**. 3rd ed. rev. e ampl. Viçosa. Ed. UFV. 2009, 529p.
- CAO, Q. V. Predicting parameters of a Weibull function for modeling diameter distribution. **Forest Science**, v.50 n.4, p. 682-685, 2004.
- GIBBONS, J. D.; SUBHABRATA, C. **Nonparametric statistical inference**. 3th. ed. New York: Marcel Dekker, 544p. (Statistics: textbook and monograph, v.31). 1992
- HAFLEY, W. L., SCHREUDER, H. T., Statistical distributions for fitting diameter and height data in ever-aged stands. **Canadian Journal of Forest Research**, v.7 p. 184-487, 1977.
- LEITE, H. G.; BINOTI, D. H. B.; GUIMARÃES, D. P.; SILVA, M. L. M.; Garcia, S. L. R. Avaliação do ajuste das funções Weibull e hiperbólica a dados de povoamentos de eucalipto submetidos a desbaste. **Revista Árvore**, v.34, n.2, p. 305-311, 2010.
- MALTAMO, M.; PUUMALAINEN, J.; PAIVINEN, R. Comparison of beta and Weibull functions for modeling basal area diameter distribution in stands of *Pinus sylvestris* and *Picea abies*. **Scand Journal Forest Research**, v.10 p. 284-295, 1995.

MALTAMO, M.; KANGAS, A.; UUTTERA, J.; TORNIAINEN, T.; SARAMAKI, J. Comparison of percentile based prediction methods and the Weibull distribution in describing the diameter distribution of heterogeneous Scots pine stands. **Forest Ecology Management**, v.133 n.3 p. 2636274, 2000.

NOGUEIRA, G. S.; LEITE, H. G.; CAMPOS, J. C. C.; CARVALHO, A. F.; SOUZA, A. L. de. Modelo de distribuição diamétrica para povoamentos de *Eucalyptus* sp. submetidos a desbaste. **Revista. Árvore**, v.29, n.4, p. 579-589, 2005.