BETH REDIVIVO

Frank Sautter
Universidade Federal de Santa Maria

Resumo: Desenvolvo um método de prova por refutação para a Lógica Proposicional Clássica, que resgata ideias dos tablôs semânticos de Evert Beth. Primeiro apresento o método em forma conjuntista, depois o utilizo em forma tabular simplificada.
Palavras-chave: regra de introdução, regra de eliminação, aceitação, rejeição, Evert Beth, refutação.

Abstract: I develop a method of proof by refutation for the Classical Propositional Logic, which retrieves ideas from the semantic tableaux of Evert Beth. First I present the method in a set-theoretical form, then I use it in a simplified tabular form.
Keywords: introduction rule, elimination rule, acceptance, rejection, Evert Beth, refutation.

> "O indivíduo do escol pode, por exemplo, aceitar inteiramente uma doutrina alheia; aceita-a, porém, criticamente, e, quando a defende, defende-a com argumentos seus (...)."
> (Fernando Pessoa, *O caso mental português*, 1932)

1. As bases teóricas do método

O linguísta Daniel Everett (2019, p. 52ss.) sugere como se deu a transição, em termos evolutivos, da utilização somente de sentenças simples para a utilização de sentenças simples e complexas. Sua sugestão recorre à passagem do discurso simples para o discurso complexo com sentenças simples, e desse, para o discurso complexo com sentenças complexas[1]. A resposta de Everett é do plano da especulação e, provavelmente, nenhuma

[1] O exemplo de discurso complexo com sentenças simples dado por Everett (2019, p. 53) é o seguinte: 'João pesca. Pedro pesca. João pega peixe. Pedro para. Pedro come o peixe João. Pedro volta. João volta mesma hora.' Segundo Everett (2019, p. 53), 'Essa história, completamente composta por sentenças não complexas, narra que João foi pescar e depois, ou na mesma hora – dependendo do que é inferido do contexto –, Pedro foi pescar. João pegou um peixe antes que Pedro. Então, Pedro parou de pescar e comeu o peixe com João. Pedro decidiu parar de pescar e voltar para casa. João voltou para casa com ele.'

resposta não especulativa possa algum dia ser dada. Que resposta um lógico pode dar à questão?

O método de prova para a Lógica Proposicional Clássica (LPC), aqui desenvolvido, teve como seu ponto de partida uma reflexão sobre essa questão. Um lógico poderia observar que, distinguindo entre sentenças aceitas e sentenças rejeitadas, temos um modo de introduzir a negação sentencial, concatenando sentenças aceitas, temos um modo de introduzir a conjunção sentencial, e concatenando sentenças rejeitadas, temos um modo de introduzir a denegação conjunta (ou seta de Peirce). A negação e a conjunção sentenciais formam um conjunto funcionalmente completo de conetivos para a LPC, e a denegação conjunta é, sozinha, funcionalmente completa para a LPC.

O método aqui desenvolvido principia com a identificação de uma coleção de sentenças aceitas e de uma coleção de sentenças rejeitadas.

Na Moderna Teoria da Prova é lugar comum que o significado das operações lógicas seja dado por regras de introdução das operações, ou por regras de eliminação das operações, ou por ambas. O método aqui desenvolvido fornece regras de introdução e de eliminação para cada conetivo adotado como primitivo[2] e para cada atitude perante sentenças (aceitação ou rejeição).

Diversos métodos de prova para a LPC, especialmente as variantes de dedução natural, utilizam hipóteses, sentenças que são introduzidas, utilizadas, mas que devem ser, finalmente, descartadas. O estatuto ontológico de hipóteses é ainda mais difícil de estabelecer do que o estatuto ontológico da maioria das outras entidades utilizadas na Lógica, por isso as evitei mediante a adoção de um procedimento por refutação[3].

Finalmente, a menção a Evert Beth, no título, deve-se ao fato de que também Beth (1959, p. 186ss.) adota duas colunas em seu Método de Tablôs Semânticos[4], e, ao invés de utilizar uma única fórmula em cada nó do tablô, como o faz Smullyan (1968), os tablôs de Beth utilizam coleções de fórmulas

[2] Utilizo negação e condicional material porque frequentemente é o conjunto funcionalmente completo adotado na literatura, mas qualquer outro conjunto funcionalmente completo poderia ser adotado sem maiores dificuldades, inclusive o par mais natural formado pela negação e pela conjunção.

[3] Métodos de prova por refutação se valem de uma caracterização alternativa mas equivalente de argumento válido, a saber, não há contra-exemplo, ou seja, não há circunstância em que as premissas são verdadeiras mas a conclusão é falsa. Isso corresponde à incompatibilidade das premissas com a negação da conclusão, ou seja, premissas e negação da conclusão não podem ser simultaneamente aceitas.

[4] Entretanto, as duas colunas dos tablôs semânticos de Beth podem, cada qual, se bifurcar internamente quantas vezes forem necessárias, enquanto que nas duas colunas do método aqui desenvolvido isso não ocorre.

em cada nó tal como faço aqui[5]. A versão mais popular do método de tablôs é devida a Smullyan (1968), que é louvada por simplificar os tablôs de Beth. O método aqui desenvolvido talvez possa figurar entre os exemplos de que nem sempre o mais simples é melhor.

Na próxima seção apresentarei o método em sua forma conjuntista completa, na seção seguinte aplicarei o método, em sua forma tabular simplificada, à prova de sua completude relativa à completude forte do sistema de Mendelson (1997) para a LPC e à apresentação de um conjunto alternativo de regras de introdução e de eliminação. Finalmente, na última seção, indicarei caminhos para uma continuidade do trabalho.

2. O método em forma conjuntista

Utilizarei uma linguagem proposicional cujos conetivos primitivos são a negação e a condicional material, um conjunto funcionalmente completo de conetivos para a LPC. O método estrutura-se do seguinte modo:

Há duas coleções de fórmulas – as fórmulas aceitas (A) e as fórmulas rejeitadas (P) – formando o par ordenado $< A, P >$. Há as seguintes 10 regras de transformação de pares ordenados ("$<A_i, P_i> \Rightarrow <A_{i+1}, P_{i+1}>$" indica a transformação de um par ordenado $<A_i, P_i>$ em outro par ordenado $<A_{i+1}, P_{i+1}>$):

1. Introdução da negação nas rejeitadas (INR): $<A \cup \{\alpha\}, P> \Rightarrow <A \cup \{\alpha\}, P \cup \{\neg\alpha\}>$.

2. Introdução da negação nas aceitas (INA): $<A, P \cup \{\alpha\}> \Rightarrow <A \cup \{\neg\alpha\}, P \cup \{\alpha\}>$.

3. Eliminação da negação nas rejeitadas (ENR): $<A, P \cup \{\neg\alpha\}> \Rightarrow <A \cup \{\alpha\}, P \cup \{\neg\alpha\}>$.

4. Eliminação da negação nas aceitas (ENA): $<A \cup \{\neg\alpha\}, P> \Rightarrow <A \cup \{\neg\alpha\}, P \cup \{\alpha\}>$.

5. Introdução da condicional nas rejeitadas (ICR): $<A \cup \{\alpha\}, P \cup \{\beta\}> \Rightarrow <A \cup \{\alpha\}, P \cup \{\beta, \alpha \supset \beta\}>$.

6. Introdução da condicional nas aceitas (ICA1): $< A, P \cup \{\alpha\}> \Rightarrow <A \cup \{\alpha \supset \beta\}, P \cup \{\alpha\}>$.

[5] No método aqui desenvolvido, tal como nos tablôs de Beth, as coleções de fórmulas organizam-se em sequências de tal modo que as fórmulas se acumulam à medida que avançamos na sequência.

7. Introdução da condicional nas aceitas (ICA2): $< A \cup \{\beta\}, P > \Rightarrow$ $< A \cup \{\beta, \alpha \supset \beta\}, P >$.

8. Eliminação da condicional nas rejeitadas (ECR): $< A, P \cup \{\alpha \supset \beta\}> \Rightarrow < A \cup \{\alpha\}, P \cup \{\beta, \alpha \supset \beta\} >$.

9. Eliminação da condicional nas aceitas (ECA1): $< A \cup \{\alpha \supset \beta, \alpha\}, P> \Rightarrow < A \cup \{\alpha \supset \beta, \alpha, \beta\}, P >$.

10. Eliminação da condicional nas aceitas (ECA2): $< A \cup \{\alpha \supset \beta\}, P \cup \{\beta\}> \Rightarrow < A \cup \{\alpha \supset \beta\}, P \cup \{\alpha,\beta\}>$.

Essas regras de transformação são válidas para a LPC, se interpretarmos como verdadeiras as fórmulas que se encontram na coleção das aceitas e como falsas as fórmulas que se encontram na coleção das rejeitadas.

O método procede por refutação; a derivabilidade de α a partir de Γ (em símbolos, $\Gamma \vdash \alpha$) define-se do seguinte modo: $\Gamma \vdash \alpha$ se, e somente se, existe uma sequência de pares ordenados tal que o primeiro par ordenado da sequência é $< \Gamma, \{\alpha\} >$, cada par ordenado da sequência, à exceção do primeiro, é a transformação do par ordenado imediatamente anterior por uma das 10 regras de transformação e, para algum par ordenado $< A_i, P_i >$ da sequência, em que "i" indica a ordem do par ordenado na sequência, $\{\beta, \neg\beta\} \subseteq A_i$ para alguma fórmula β. Em razão da presença das regras de transformação ENA e INR, essa condição de fecho pode ser expressa, alternativamente, pelas seguintes condições:

a) $\beta \in A_i$ e $\beta \in P_i$
b) $\{\beta, \neg\beta\} \subseteq P_i$

A correção do método foi dada acima em razão da validade das 10 regras de transformação. A completude forte do método será apresentada na próxima seção ao mostrar que todos os axiomas e a regra de inferência do sistema correto e fortemente completo para a LPC de Mendelson (1997) são prováveis pelo método aqui apresentado.

3. Aplicações do método em forma tabular

A aplicação do método pode ser apresentada de forma tabular simplificada[6], com uma coluna para as fórmulas aceitas, uma coluna para as fórmulas rejeitadas, e uma coluna para a justificativa.

A título de ilustração, para apresentar a aplicação do método em sua forma tabular, demonstrarei os axiomas utilizados por Mendelson (1997, p. 35):

A. $\vdash \alpha \supset (\beta \supset \alpha)$

Aceitas	Rejeitadas	Justificativa
	$\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$	A ser demonstrada por refutação
α	$\beta \supset \alpha$	ECR
β	α	ECR
$\neg\alpha$		INA

"α" e "$\neg\alpha$" em negrito indicam que a condição de fecho foi atendida.

Essa prova em forma tabular simplificada corresponde à seguinte sequência de pares ordenados de coleções de fórmulas: $<\varnothing,\{\alpha\supset(\beta\supset\alpha)\}> \Rightarrow <\{\alpha\}, \{\alpha\supset(\beta\supset\alpha), \beta\supset\alpha\}> \Rightarrow <\{\alpha,\beta\}, \{\alpha\supset(\beta\supset\alpha), \beta\supset\alpha, \alpha\}> \Rightarrow <\{\alpha, \beta, \neg\alpha\}, \{\alpha\supset(\beta\supset\alpha), \beta\supset\alpha, \alpha\}>$ QED.

B. $\vdash (\alpha \supset (\beta \supset \chi)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi))$

Aceitas	**Rejeitadas**	**Justificativa**
	$(\alpha \supset (\beta \supset \chi)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi))$	A ser demonstrada por refutação
$\alpha \supset (\beta \supset \chi)$	$(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi)$	ECR
$\alpha \supset \beta$	$\alpha \supset \chi$	ECR
α	χ	ECR
$\neg\chi$		INA
$\beta\supset\chi$		ECA1
β		ECA1
χ		ECA1

[6] A forma é simplificada porque não aparecem nos nós todas as fórmulas, somente aquelas que são relevantes ao passo de prova.

Novamente, "$\neg\chi$" e "χ" em negrito indicam que a condição de fecho foi atendida.

Essa prova em forma tabular simplificada corresponde à seguinte sequência de pares ordenados de coleções de fórmulas:

$<\varnothing,\{(\alpha \supset (\beta \supset \chi)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi))\}> \Rightarrow$

$<\{\alpha \supset (\beta \supset \chi)\}, \{(\alpha \supset (\beta \supset \chi)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi)), (\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi)\}> \Rightarrow$

$<\{\alpha \supset (\beta \supset \chi), \alpha \supset \beta\}, \{(\alpha \supset (\beta \supset \chi)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi)), (\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi), \alpha \supset \chi\}> \Rightarrow$

$<\{\alpha \supset (\beta \supset \chi), \alpha \supset \beta, \alpha\}, \{(\alpha \supset (\beta \supset \chi)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi)),(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi), \alpha \supset \chi, \chi\}> \Rightarrow$

$<\{\alpha \supset (\beta \supset \chi), \alpha \supset \beta, \alpha, \neg\chi\}, \{(\alpha \supset (\beta \supset \chi)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi)), (\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi), \alpha \supset \chi, \chi\}> \Rightarrow$

$<\{\alpha \supset (\beta \supset \chi), \alpha \supset \beta, \alpha, \neg\chi, \beta\supset\chi\}, \{(\alpha \supset (\beta \supset \chi)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi)), (\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi), \alpha \supset \chi, \chi\}> \Rightarrow$

$<\{\alpha \supset (\beta \supset \chi), \alpha \supset \beta, \alpha, \neg\chi, \beta\supset\chi, \beta\}, \{(\alpha \supset (\beta \supset \chi)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi)), (\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi), \alpha \supset \chi, \chi\}> \Rightarrow$

$<\{\alpha \supset (\beta \supset \chi), \alpha \supset \beta, \alpha, \neg\chi, \beta\supset\chi, \beta, \chi\}, \{(\alpha \supset (\beta \supset \chi)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi)), (\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \chi), \alpha \supset \chi, \chi\}>$ QED.

C. $\vdash (\neg\alpha \supset \neg\beta) \supset ((\neg\alpha \supset \beta) \supset \alpha)$

Aceitas	Rejeitadas	Justificativa
	$(\neg\alpha \supset \neg\beta) \supset ((\neg\alpha \supset \beta) \supset \alpha)$	A ser demonstrada por refutação
$\neg\alpha \supset \neg\beta$	$(\neg\alpha \supset \beta) \supset \alpha$	ECR
$\neg\alpha \supset \beta$	α	ECR
$\neg\alpha$		INA
$\neg\beta$		ECA1
β		ECA1

Novamente, "$\neg\beta$" e "β" em negrito indicam que a condição de fecho foi atendida.

Essa prova em forma tabular simplificada corresponde à seguinte sequência de pares ordenados de coleções de fórmulas:

$<\varnothing, \{(\neg\alpha \supset \neg\beta) \supset ((\neg\alpha \supset \beta) \supset \alpha)\}> \Rightarrow$

$<\{\neg\alpha \supset \neg\beta\}, \{(\neg\alpha \supset \neg\beta) \supset ((\neg\alpha \supset \beta) \supset \alpha), (\neg\alpha \supset \beta) \supset \alpha\}> \Rightarrow$

$<\{\neg\alpha \supset \neg\beta, \neg\alpha \supset \beta\}, \{(\neg\alpha \supset \neg\beta) \supset ((\neg\alpha \supset \beta) \supset \alpha), (\neg\alpha \supset \beta) \supset \alpha, \alpha\}> \Rightarrow$

$<\{\neg\alpha \supset \neg\beta, \neg\alpha \supset \beta, \neg\alpha\}, \{(\neg\alpha \supset \neg\beta) \supset ((\neg\alpha \supset \beta) \supset \alpha), (\neg\alpha \supset \beta) \supset \alpha, \alpha\}> \Rightarrow$

$<\{\neg\alpha \supset \neg\beta, \neg\alpha \supset \beta, \neg\alpha, \neg\beta\}, \{(\neg\alpha \supset \neg\beta) \supset ((\neg\alpha \supset \beta) \supset \alpha), (\neg\alpha \supset \beta) \supset \alpha, \alpha\}> \Rightarrow$

$<\{\neg\alpha \supset \neg\beta, \neg\alpha \supset \beta, \neg\alpha, \neg\beta, \beta\}, \{(\neg\alpha \supset \neg\beta) \supset ((\neg\alpha \supset \beta) \supset \alpha), (\neg\alpha \supset \beta) \supset \alpha, \alpha\}>$ QED.

Desde que a única regra de inferência de Mendelson (1997) é a regra de *modus ponens*, e ela corresponde à aplicação direta da regra de transformação ECA1, o sistema é fortemente completo para a LPC.

O método apresenta uma certa deselegância, porque há duas regras para a introdução da condicional nas aceitas (ICA1 e ICA2) e duas regras para a eliminação da condicional nas aceitas (ECA1 e ECA2). As regras ICA2 e ECA1 podem ser eliminadas, desde que se introduzam, em seu lugar, as seguintes regras de contraposição da condicional:

4. Condicional para contrapostiva(CC1): $<A \cup \{\alpha \supset \beta\}, P> \Rightarrow <A \cup \{\alpha \supset \beta, \neg\beta\supset\neg\alpha\}, P>$

5. Contrapostiva para condicional(CC2): $<A\cup\{\neg\beta \supset \neg\alpha\}, P> \Rightarrow <A\cup\{\alpha \supset \beta, \neg\beta\supset\neg\alpha\}, P>$

A prova de ECA1, em forma tabular, mediante as novas regras procede do seguinte modo:

Aceitas	**Rejeitadas**	**Justificativa**
$\{\alpha \supset \beta, \alpha\}$		Dados
$\neg\beta\supset\neg\alpha$		CC1
	$\neg\alpha$	INR
	$\neg\beta$	ECA2
β		ENR

A prova de ICA2, em forma tabular, mediante as novas regras procede do seguinte modo:

Aceitas	**Rejeitadas**	**Justificativa**
β		Dado
	$\neg\beta$	INR
$\neg\beta \supset \neg\alpha$		ICA1
$\alpha\supset\beta$		CC2

Considerações finais

No fragmento intuicionista da Lógica Proposicional, as regras de transformação de Introdução da Negação nas Aceitas – da rejeição de α obter a aceitação de $\neg\alpha$ – e de Eliminação da Negação nas Rejeitadas – da rejeição de $\neg\alpha$ obter a aceitação de α –, não são válidas.

As condições de fecho alternativas, apresentadas ao final da segunda seção, também não são adequadas intuicionisticamente, por falharem INA e ENR.

Aparentemente a desconsideração de INA e ENR é suficiente, por exemplo, para barrar a prova da Lei de Peirce, que não é intuicionisticamente válida; a seguinte prova simples da Lei de Peirce mostra o papel fundamental de regras para a negação em sua prova, ainda que a Lei de Peirce seja constituída exclusivamente por condicionais:

Aceitas	**Rejeitadas**	**Justificativa**
	$((\alpha \supset \beta) \supset \alpha) \supset\alpha$	A ser demonstrada por refutação
$(\alpha \supset \beta) \supset\alpha$	α	ECR
	$\alpha \supset \beta$	ECA2
α	β	ECR
$\neg\alpha$		INA

A conversa da contraposição CC2 – da aceitação de $\neg\beta \supset \neg\alpha$ obter a aceitação de $\alpha \supset \beta$ – também não é intuicionisticamente válida e, possivelmente, outras regras de transformação para a condicional também não são aceitáveis. Mas isso, e uma extensão do método para outras lógicas, é tema para um outro trabalho.

Referências

BETH, E. W. *The Foundations of Mathematics:* A Study in the Philosophy of Science. Amsterdam: North-Holland, 1959.
EVERETT, D. L. *Linguagem:* a história da maior invenção da humanidade. São Paulo: Editora Contexto, 2019.
MENDELSON, E. *Introduction to Mathematical Logic.* Fourth Edition. Boca Raton: Chapman & Hall / CRC, 1997.
SMULLYAN, R. M. *First-order Logic.* New York: Springer-Verlag, 1968.

Email: ftsautter@ufsm.br

Recebido: 03/2020
Aprovado: 03/2021